

СЕРИЯ «ДОСТИЖЕНИЯ СОВРЕМЕННОЙ ГЕОТЕХНИКИ»

В.Н. Парамонов

**МЕТОД
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
ПРИ РЕШЕНИИ
НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ
ГЕОТЕХНИКИ**

Посвящается памяти моего учителя –
профессора Александра Борисовича Фадеева

Группа компаний «Геореконструкция»
Санкт-Петербург
2012

УДК 624.131

В.Н. Парамонов

Метод конечных элементов при решении нелинейных задач геотехники:
Группа компаний «Геореконструкция» – СПб. 2012.

ISBN 978-5-9902005-4-8

Табл. 5. Илл. 148. Библиогр.: 148 назв.

В книге приведены методы построения систем конечно-элементных уравнений для решения нелинейных задач в геотехническом строительстве. Даны алгоритмы решения задач для нелинейно-деформируемого массива грунта. Рассмотрены приемы решения нестационарных задач – теории фильтрационной консолидации, теории ползучести. Предложено решение задач о деформациях массива грунта с учетом фильтрационных сил. Представлены способы построения уравнений метода конечных элементов для геометрически нелинейных задач. Дан анализ особенностей поведения грунтовой среды, моделируемой приведенными математическими соотношениями. Представлены примеры решения геотехнических задач. Для работников научно-исследовательских и проектных организаций, преподавателей, аспирантов и студентов строительных и транспортных вузов.

Рецензенты: д.т.н., профессор С.А. Кудрявцев (Дальневосточный государственный университет путей сообщения), д.т.н., профессор И.И. Сахаров («СПбГАСУ»).

ISBN 978-5-9902005-4-8

© Группа компаний «Геореконструкция», 2012

ОБ АВТОРЕ



Парамонов Владимир Николаевич – доктор технических наук, профессор кафедры «Основания и фундаменты» Санкт-Петербургского государственного университета путей сообщения, технический директор института «Геореконструкция», член Президиума Российского общества по механике грунтов, геотехнике и фундаментостроению, член Технического комитета №212 «Фундаменты глубокого заложения» Международного общества по механике грунтов и геотехнике (ISSMGE), автор более 100 научных публикаций.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга, которую держит в руках уважаемый читатель, продолжает серию «Достижения современной геотехники», в которой ранее вышли в свет монографии профессора К. Ишихары (Япония), профессора В. Ван Импе (Бельгия), а также книга, написанная совместно профессором В.М. Улицким, А.Г. Шашкиным и К.Г. Шашкиным.

Книга написана профессором В.Н. Парамоновым, ведущим отечественным специалистом в области численных расчетов в геотехнике. Монография подытоживает 25-летний труд автора и выходит в год его пятидесятилетия. Профессор В.Н. Парамонов, представитель петербургской геотехнической школы, продолжает и развивает направление современной строительной науки, связанное с численным моделированием поведения грунтов основания, одним из основателей которого был профессор А.Б. Фадеев, учитель автора.

Книга посвящена решению нелинейных задач, одной из самых актуальных тем геотехники, поскольку грунты основания являются преимущественно нелинейно деформируемыми средами.

В настоящее время требование об учете физической, геометрической нелинейности, реологических свойств грунтов содержится не только в таких основополагающих нормативных документах как Свод Правил «Основания зданий и сооружений», но является и одним из ключевых положений Федерального закона №384 «Технологический регламент по безопасности зданий и сооружений». Реализация этого требования в повседневной практике геотехнических расчетов и проектировании до недавнего времени была затруднена отсутствием эффективных инструментов расчета. Геометрически и физически нелинейное поведение грунтов, проявление их реологических свойств может быть описано только с привлечением численных методов расчета, среди которых наиболее эффективным является метод конечных элементов.

Программные продукты, реализующие те или иные аспекты описания нелинейного поведения грунтов, вошли в обиход сравнительно недавно. Удобство интерфейса программ и хороший дизайн выводимых на печать результатов породили опасную иллюзию о доступности нелинейных расчетов для рядового пользователя, не являющегося специалистом в области механики грунтов и численного моделирования поведения грунта. Книга, написанная профессором В.Н. Парамоновым, способна, с одной стороны, развеять иллюзии о кажущейся простоте нелинейных моделях и охладить горячие головы непрофессиональных пользователей современных программ. С другой же стороны, для тех, кто хочет овладеть основами нелинейных расчетов, эта книга поможет стать специалистом.

Д-р техн. наук, профессор В.М. Улицкий

ВВЕДЕНИЕ

Любой инженерный расчет включает в себя три основных компоненты:

- основные законы и соотношения классической механики;
- модель среды, представляющую собой математическое описание реакции среды на внешнее воздействие;
- расчетную схему, представляющую собой геометрию рассматриваемой системы, схему взаимодействия элементов системы и схему внешних воздействий.

Существующие инженерные методы расчета оснований, регламентированные современными нормативными документами, предполагают максимальное упрощение расчетных схем и введение различного рода допущений, обусловленных невозможностью в большинстве практических случаев получения аналитических решений в замкнутом виде.

Во многих случаях использование инженерных методов оправдано, поскольку физико-механические характеристики грунтов, как природной среды, при исследовании как в лабораторных, так и в полевых условиях имеют существенный разброс. Поэтому механическое поведение грунта будет описываться любыми уравнениями только приближенно, а усложнение математической модели грунта и создание нового расчетного аппарата можно считать оправданным только в том случае, если модель учитывает существенные в данной геотехнической ситуации качественные особенности работы грунта, неываемые иными методами расчета.

Кроме этого, время проведения лабораторных экспериментов на несколько порядков меньше времени существования сооружения, поэтому оценка развития осадок сооружения во времени на основании лабораторных экспериментов связана с экстраполяцией результатов лабораторных опытов применительно к натурным условиям. Чем сложнее реологическая модель среды, тем больше параметров (определяемых для природных сред с более низкой точностью, чем для искусственных материалов) в нее входит и тем больше вероятность ошибки при прогнозе дальнейших деформаций. Наш опыт показывает, что даже при уточнении параметров реологической модели по резуль-

татам длительных наблюдений за деформациями основания сооружения, попытки применить те же параметры сложной модели для иного сооружения со сходными инженерно-геологическими условиями приводят к большим ошибкам, чем модели с малым числом параметров.

На практике часто наблюдается весьма существенная количественная разница между характеристиками грунтов, полученных из результатов лабораторных и натурных испытаний. Например, осадка фундамента, рассчитываемая с использованием компрессионного модуля деформации, обычно оказывается выше, чем наблюдаемая в натурных условиях. Для перехода от компрессионного модуля к штамповому вводится эмпирический повышающий коэффициент Агишева, достигающий 6 для глинистых грунтов с $IL \leq 0,75$ и $e = 0,65 \dots 0,75$ («Основания, фундаменты и подземные сооружения», 1985, табл. 1.16). Систематические ошибки компрессионных испытаний, обусловливающие введение этого поправочного коэффициента, по существу сводят к нулю ценность каких-либо теоретических решений, использующих компрессионный модуль. В этом случае некорректными оказываются механические параметры, используемые в различных моделях, например мгновенный модуль, равновесный модуль, времена релаксации спектра в механических моделях теории ползучести, параметры ядер ползучести в наследственных и стареющих реологических моделях, коэффициент консолидации в теории фильтрационной консолидации и т. п.). При определении параметров прочности водонасыщенных глинистых грунтов обычно наблюдается обратная картина – в лабораторных опытах параметры сопротивления сдвигу выше, чем при определении их крыльчаткой в натурных условиях. В последнем случае оказывается, что сопротивление сдвигу глинистого грунта по глубине практически постоянно или незначительно увеличивается, т.е. угол внутреннего трения глинистого грунта в натурных условиях близок к нулю. Значительно разнятся между собой и результаты определения механических характеристик в различных лабораторных приборах – компрессионных, трехосных, прямого среза и т.д.

Грунт в натурных условиях испытывает существенное начальное напряженное состояние, что обусловлено давлением вышележащих слоев грунта. Однако способ учета природных напряжений при решении практических задач однозначно не определен. Одной из базовых гипотез в механике грунтов является следующая гипотеза: в природных условиях грунт стремится к равновесному состоянию с шаровым тензором напряжений. Поэтому в практических расчетах часто принимается равенство природных компонент напряжений по всем направлениям.

Геометрия напластования грунтов при построении инженерно-

геологических разрезов определяется по нескольким скважинам методом интерполяции, а линзы и выклинивания слоев грунта показывают условно. Эти факторы так же вносят определенную долю ошибок при прогнозе деформаций основания. О достаточной степени достоверности изучения инженерно-геологических условий можно говорить только в случае выдержанного напластования грунтов.

Таким образом, любой выполняемый расчет будет предполагать не точный прогноз, а оценку напряженно-деформированного состояния основания с той или иной степенью вероятности. Часто опыт и интуиция проектировщика дают более достоверную оценку осадки сооружения, чем нормативный расчетный аппарат. Тем не менее, инженерные методы не обладают универсальностью, поэтому для каждой схемы взаимодействия основания и сооружения разрабатываются собственные методы расчета. Если результаты инженерного метода расчета не соответствуют натурным данным, то выполняются достаточно трудоемкие экспериментальные исследования и на основании исследований вводится система эмпирических коэффициентов, корректирующих условность расчетной схемы. Следует заметить, что наиболее доступными и достоверными в натурных экспериментах и наблюдениях являются методы определения перемещений дневной поверхности (геодезические методы). Поэтому любые гипотезы или теории в механике грунтов считаются обоснованными, если они дают достоверный прогноз развития осадок поверхности грунта. Однако весьма часто информация о перемещениях дневной поверхности может иметь неоднозначное толкование, что связано с малой изученностью процессов, происходящих непосредственно в массиве грунта.

Расчет оснований в условиях сложной геотехнической ситуации, оценка влияния нового строительства на существующие сооружения в условиях плотной застройки требуют изучения полных полей напряжений и деформаций, т.е. представления математических соотношений в тензорной форме; более полного отражения реакции грунтов на физические воздействия, для которых характерна нелинейность работы и накопление остаточных деформаций даже при воздействиях небольшой интенсивности; приближения геометрии системы и схемы взаимодействия элементов системы к реальным условиям. Наша практика геотехнической оценки строительства в условиях Санкт-Петербурга показывает, что теоретические расчеты позволяют во многих случаях выявить и оценить многие факторы, неочевидные и не отражаемые инженерными методами расчета.

Построение разрешающих уравнений в замкнутой форме при сложной геометрии напластования грунтов, произвольном нагружении как в пространстве, так и во времени, изменении граничных условий

задачи, использований нелинейных зависимостей между напряжениями и деформациями возможно в настоящее время только численными методами, и, в частности, с привлечением одного из наиболее развитых и апробированных – метода конечных элементов (МКЭ).

Метод конечных элементов стал одним из наиболее эффективных численных методов при решении задач строительной механики, и в том числе геотехники, с развитием вычислительной техники. Преимуществами метода конечных элементов являются возможность учета физической и геометрической нелинейности, в той или иной мере присущей всем деформируемым телам, максимального приближения расчетных схем к реальным условиям работы среды. Метод конечных элементов, теоретические основы которого для решения задач механики сплошной среды изложены в работах К. Бате и Е. Вилсона (1982), О. Зенкевича (1975), Дж. Коннора и К Бреббия (1979), Дж. Одена (1976), Л. Сегерлинда (1979) и др., нашел широкое применение при решении нелинейных и нестационарных задач геотехники (А.К. Бугров, 1974, 1975, Ю.К. Зарецкий, 1988, 1989, С.Б. Ухов, 1973, А.Б. Фадеев, 1987, 1994, В.Г. Федоровский, 1985, 1986, А.К. Черников, 1994, и др.).

Любая система уравнений метода конечных элементов для деформируемой среды в условиях статического (квазистатического) нагружения сводится к линейной системе уравнений равновесия, удовлетворяющих граничным условиям. Если среда многофазная и существует возможность изменения содержания фаз в среде, то дополнительно должно быть составлено уравнение неразрывности, удовлетворяющее соответствующим начальным и граничным условиям. Уравнения равновесия в МКЭ представляются через узловые силы, а уравнения неразрывности через узловые расходы. Например, система уравнений равновесия одно-квазидиффузных деформируемых сред записывается в виде:

$$[K]\{\delta\} = \{F\}; \quad (1)$$

система уравнений задачи фильтрационной консолидации трехфазной среды имеет вид:

$$\begin{cases} [K]\{\delta(t)\} + [C]\{p(t)\} = \{F\} \\ [C]^T\{\delta(t)\} - g * [K_f]\{p(t)\} - [E]\{p(t)\} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

где $[K]$ – матрица жесткости системы конечных элементов, характеризующая геометрию расчетной области и механические свойства среды;

$[K_f]$ – матрица фильтрационных свойств среды;

-
- [E] – матрица сжимаемости поровой воды;
 $\{\delta(t)\}$ – вектор узловых перемещений;
 $\{F\}$ – вектор узловых сил;
 $\{p(t)\}$ – вектор узловых поровых давлений.

Простейшим и наиболее очевидным методом решения нелинейных задач (в том числе задач, в которых фактором нелинейности служит время) является приложение силового или временного фактора достаточно малыми шагами с корректировкой на очередном шаге свойств и геометрии среды как функции достигнутого на предыдущем шаге решения напряженного и/или деформированного состояния. Такой метод решения нелинейных задач соответствует методу прямоугольников интегрирования функций. Очевидно, что точность решения зависит от шага решения. В некоторых случаях (например, при решении задач ползучести) рекомендуется уточнять параметры среды по достигнутому на данном шаге состоянию среды. Такие методы решения получили название методов переменной матрицы жесткости. Они не всегда экономичны с точки зрения использования времени машинного счета, поскольку на каждом шаге решения необходимо формирование и обращение новой матрицы жесткости системы.

При решении задач, в которые входят производные неизвестных функций по времени, наиболее эффективными по устойчивости и сходимости являются решения, в которых производные функций по времени заменяются конечно-разностными аналогами первого $dF/dt = (F(t_n) - F(t_{n-1}))/\Delta t$ или более высоких порядков. В таких задачах на очередном шаге решения по известным значениям функции $F(t_{n-1})$ ($F(t_{n-2}), \dots$) на предыдущие моменты времени вычисляется значение функции на текущий момент времени $F(t_n)$. При этом в матрицу жесткости системы входит значение Δt . При постоянном шаге Δt матрица жесткости всегда постоянная. Однако, большинство аналитических зависимостей функции F от времени t имеют затухающий характер, поэтому удобнее назначать некоторый параметр возрастания временного интервала Δt . При этом на очередном шаге решения удается формировать и обращать только часть МЖС, в которую входит Δt (например, в задаче фильтрационной консолидации – матрица фильтрационных потоков $[K_f]$).

Решение нелинейных задач часто и наиболее эффективно выполняется через правую часть системы уравнений, что дает возможность получать решения при постоянной матрице жесткости (А.Б. Фадеев 1987), хотя поступление на рынок более мощных и доступных по цене вычислительных машин позволяет эффективно решать задачи и методом переменной МЖС, а также сочетанием переменной МЖС с корректировкой вектора правой части в пределах шага нагружения.

В общем случае, при решении нелинейных задач через правую часть, последняя может быть представлена в виде:

$$\{F(t_n)\} = \{F_e(t_{n-1})\} + \{\Delta F_e(t_n)\} + \{F_\gamma(t_{n-1})\} + \{\Delta F_\gamma(t_n)\} + \{F_p(t_{n-1})\} + \{\Delta F_p(t_n)\} + \{F_f(t_{n-1})\} + \{\Delta F_f(t_n)\}, \quad (3)$$

где $\{F_e(t_{n-1})\}$ – вектор сил, обусловленный внешними силовыми факторами (внешней нагрузкой) на предыдущем шаге решения;

$\{\Delta F_e(t_n)\}$ – прирост нагрузки на текущем шаге решения (временном шаге и/или шаге нагружения);

$\{F_\gamma(t_{n-1})\}$ – вектор сил от массовых нагрузок;

$\{F_\gamma(t_{n-1})\}$ – прирост вектора массовых сил;

$\{F_p(t_{n-1})\}$ – фиктивный вектор накопленных сил, определяемый нелинейной математической моделью среды и включающий накопленные деформации (напряжения) в среде. Этот вектор определяется законом накопления деформаций (пластических, вязкопластических, вязкоупругих, нелинейно упругих и т.п.). Для его вычисления в МКЭ обычно используются так называемые методы начальных напряжений или начальных деформаций;

$\{\Delta F_p(t_n)\}$ – прирост фиктивного вектора узловых сил;

$\{F_f(t_{n-1})\}$ – дополнительные силовые факторы, определяемые физическими условиями работы среды (температурные воздействия, фильтрационное давления, динамика [в квазистатических условиях нагружения], усадка, набухание и т.д.);

$\{\Delta F_f(t_n)\}$ – прирост дополнительных сил.

Аналогично через правую часть системы уравнений могут решаться задачи с учетом физической нелинейности изменения содержания фаз (учет начального градиента напора, переменного коэффициента фильтрации и т.п.) в виде вектора фиктивных дополнительных расходов в уравнении неразрывности.

Подобная схема построения систем уравнений для решения геотехнических задач использовалась в настоящей книге.

1

ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ГРУНТОВ

1.1. Модели грунта и методы расчета конечных деформаций основания

Одним из основных принципов проектирования оснований является принцип проектирования по предельным состояниям и, в первую очередь, по II группе предельных состояний, т.е. по деформациям. Расчет по II группе предельных состояний заключается в удовлетворении условию:

$$S \leq S_u, \quad \frac{\Delta S}{L} \leq \left(\frac{\Delta S}{L} \right)_u,$$

где S – осадка сооружения,

S_u – предельно допустимая осадка,

$\frac{\Delta S}{L}$ – неравномерность осадок,

$\left(\frac{\Delta S}{L} \right)_u$ – предельно допустимая неравномерность осадок.

Предельно допустимые значения деформаций регламентированы действующими нормами из условий безопасной эксплуатации сооружений, а в ряде случаев определяются технологическими требованиями для промышленных предприятий и архитектурными соображениями. При проектировании нового сооружения деформации основания определяются от веса сооружения, а при проектировании сооружений рядом с существующими оценивается развитие дополнительных деформаций существующей застройки от влияния нового строительства.

Расчет напряженно-деформированного состояния оснований изначально основывался на применении решений теории упругости для полупространства, после того, как Н.М. Герсеванов на основе анализа результатов компрессионных испытаний сформулировал принцип линейной деформируемости грунта. Эти методы и по настоящее время являются основой для упрощенных, инженерных методов расчета оснований.

Сравнение многочисленных натурных исследований и наблюдений за осадками штампов и сооружений (В. В. Макаров, 1969, Н. А. Цытович, 1968, E. Schultze and W. Sievering, 1977, и др.) с результатами расчетов оснований методами теории упругости по компрессионному модулю показывают, что разница расчетных и наблюдавшихся осадок зависит как от интенсивности нагрузки, так и от размеров фундамента. В большинстве случаев расчетная осадка оказывается выше наблюдавшейся в натурных условиях. При этом глубина развития деформаций основания в натурных условиях оказывается существенно меньше, чем прогнозируемая методами расчета оснований на упругом полупространстве (А.В. Голли, 1972, Б.И. Далматов и др., 1973, П.А. Коновалов, 1970, и др.). В то же время С.Н. Сотников (1987) на основании многочисленных наблюдений за осадками зданий в Санкт-Петербурге приходит к выводу о том, что расчет деформаций по формулам теории упругости с использованием компрессионного модуля наилучшим образом коррелирует с наблюдавшими деформациями. Сравнение результатов расчетов осадок по формулам СНиП, выполненное С.Н. Сотниковым, с наблюдавшими осадками фундаментов на глинистых грунтах различной консистенции, показало, что чем выше показатель текучести грунта, тем в большей степени расчеты по формулам линейной теории упругости при использовании компрессионного модуля соответствуют наблюдавшим осадкам.

В развитии инженерных методов расчета оснований можно выделить следующие направления:

- ограничение мощности сжимаемой толщи. Метод послойного суммирования расчет осадок фундаментов, регламентированный СНиП 2.02.01-83, предполагает ограничивать глубину сжимаемой толщи исходя из условия $\sigma_{zp} \leq 0,2\sigma_{zg}$ в общем случае и $\sigma_{zp} \leq 0,1\sigma_{zg}$ для грунтов с модулем деформации $E_0 \leq 5$ МПа. Завышенное значение сжимаемой толщи, прогнозируемое такими условиями, привело к предложениям об ограничении сжимаемой толщи структурной прочностью грунта (М.Ю. Абелев, 1983, А.В. Голли, 1972, В.Н. Широков, 1987, Б.В. Швец, 1969, и др.) и к корректировке метода ограничения в новом издании СНиП (СП 22.1330.2011);

- введение в расчеты переменного модуля деформации. Это направление нашло отражение в работах Г.К. Клейна (1956), Ю.А. Рогатина (1976) и других исследователей, которые предлагали использовать модуль деформации, изменяющийся по глубине по различным законам, либо модуль деформации принимался как функция действующего давления (Б.И. Далматов, В.М. Чикишев, 1984, В.М. Чикишев, 1978, А.Г. Шашкин и др., 1994);

- учет природного напряженного состояния грунта при определении

нии модуля деформации в лабораторных условиях. В работах этого направления (А.В. Голли и др., 1985, А.В. Голли, М.Б. Лисюк, 1985, Б.И. Далматов и др., 1984) предлагается модуль деформации определять при нагрузках, превышающих природное давление грунта, для чего образцы грунта перед нагружением дополнительной нагрузкой следует предварительно приводить в природное напряженное состояние приложением соответствующих вертикальных и горизонтальных нагрузок.

Инженерные методы расчета достаточно хорошо зарекомендовали себя на практике, подтверждены натурными экспериментами и в большинстве случаев достаточно достоверно позволяют прогнозировать осадку отдельных фундаментов. Однако инженерные методы расчета, использующие модуль деформации как интегральную характеристику сжимаемости грунта, применимы только в условиях простейшего нагружения основания.

Для сложных условий работы основания, включающих такие факторы, как сложная геометрия и неоднородная система нагрузок, изменение геометрии области активного деформирования грунта на стадии производства геотехнических работ, сложные инженерно-геологические условия строительной площадки, оценка влияния техногенных факторов на изменение напряженно-деформированного состояния основания и т. п., схемы расчета не могут быть сведены к простейшим инженерным схемам. В таких случаях расчетные модели должны наиболее полно учитывать особенности работы грунтов в условиях пространственного нагружения, а методы расчета включать учет изменения напряжений и деформаций по всем направлениям, а не только по вертикальному направлению, что предполагает составление основных соотношений в тензорной форме.

Многочисленные лабораторные эксперименты на образцах различных грунтов, проводившиеся разными исследователями в приборах трехосного нагружения, показали, что работа грунта характеризуется нелинейностью зависимости деформаций от действующих нагрузок. Обобщая результаты экспериментов, можно выделить следующие особенности работы грунтов в отличие от закономерностей сплошных твердых материалов:

- при гидростатическом нагружении работа грунта характеризуется накоплением как обратимых, так и необратимых деформаций, причем зависимость обратимых и необратимых деформаций от величины действующего давления имеет нелинейный характер;
- обжатие грунтов приводит к увеличению сопротивления сдвигу;
- деформируемость и прочность грунтов зависят как от величины гидростатического давления и интенсивности касательных напряже-

ний, так и от вида напряженного состояния;

– при приложении касательных напряжений может иметь место как уменьшение, так и увеличение объема грунта.

Изучение отмеченных особенностей и максимальный учет закономерностей деформируемости грунтов в расчетах оснований являются наиболее перспективной и актуальной темой исследований в современной нелинейной геотехнике. Интерпретация результатов лабораторных исследований и построение моделей грунта выполняются на основании положений нелинейной теории упругости, деформационной теории пластичности либо теории пластического течения.

В рамках нелинейной теории упругости определяются уравнения, аппроксимирующие зависимость между полными деформациями и действующими напряжениями, представляемые в инвариантной форме:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v(\sigma_0, \tau_i, \mu_\sigma);$$

$$\gamma_i = \gamma_i(\sigma_0, \tau_i, \mu_\sigma),$$

где ε_v – объемная деформация;

γ_i – интенсивность деформаций сдвига;

σ_0 – среднее (гидростатическое) напряжение;

τ_i – интенсивность касательных напряжений;

μ_σ – параметр Лоде, определяющий вид напряженного состояния.

Заметим, что в большинстве случаев параметр Лоде не вводится в определяющие уравнения модели грунта. Первыми в нашей стране проведены трехосные испытания грунта А.И. Боткиным (1940), который предложил зависимость, связывающую октаэдральные напряжения τ_0 с октаэдральными деформациями γ_0 :

$$\tau_0 = \frac{A\gamma_0}{B + \gamma_0},$$

где $A = c_0 + \sigma_0 \operatorname{tg}\phi_0$ – предельное значение октаэдральных касательных напряжений при $\gamma_0 \rightarrow \infty$;

B – экспериментальная константа;

c_0 и ϕ_0 – соответственно, октаэдральные удельное сцепление и угол внутреннего трения.

В различных работах связь касательных напряжений с деформациями сдвига аппроксимировалась различными функциями (С.С. Вялов, 1978), отражающими увеличение интенсивности изменения деформаций при увеличении напряжений: степенной $\tau_i = A\gamma_i^m$; комбини-

рованной линейно-степенной $\gamma_i = \frac{\tau_i}{G} + \left(\frac{\tau_i}{A}\right)^{\frac{1}{m}}$; дробно-линейной

$\tau_i = \frac{G_0 \tau_s}{\tau_s + G_0 \gamma_i}$, где τ_s – предельное значение интенсивности касательных напряжений при $\gamma_i \rightarrow \infty$; и иными зависимостями.

Для описания связи объемных деформаций с объемными напряжениями используются зависимости, отражающие уменьшение интенсивности изменения объемных деформаций с увеличением объемного давления (А.К. Бугров и др., 1987, С.С. Вялов, 1978, А.Б. Фадеев, 1987): экспоненциальная зависимость С.Р. Месчяна $\varepsilon_v = \varepsilon_s (1 - e^{-b\sigma_v})$, где ε_s – предельное значение объемной деформации, достигаемое при $\sigma_v \rightarrow \infty$; дробная зависимость М.В. Малышева $\sigma_0 = \frac{K\varepsilon_v}{1 - \alpha K\varepsilon_v}$; и другие

зависимости.

В моделях грунтов, строящихся на основе нелинейной теории упругости, отсутствует разделение деформаций на обратимую и необратимую составляющие, в связи с чем такие модели могут достаточно хорошо описывать качественные условия работы грунта в условиях простого нагружения, однако они неприменимы для условий несоосного и пассивного нагружения.

Модели деформационной теории пластичности строятся на основании следующих предпосылок:

- тензор деформаций представляет собой сумму тензора упругих и тензора пластических деформаций;
- связь между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций инвариантна к виду напряженного состояния;
- напряженное и деформированное состояние принимаются подобными, т.е. тензор напряжений пропорционален тензору деформаций.

Тензор упругих деформаций связывается с тензором напряжений уравнениями обобщенного закона Гука. При условии подобия тензора напряжений и тензора деформаций имеет место выражение:

$$\sigma_{ij} = \chi \varepsilon_{ij},$$

где параметр χ , называемый иногда модулем пластичности, интегрально отражает накопление упругих и пластических деформаций.

Метод конечноэлементного решения геотехнических задач на основе моделей деформационной теории пластичности предложен, например, А.Б. Фадеевым (1987, 1994). Разделение деформаций на упругую и пластическую составляющие, в отличие от методов нелинейной теории упругости, позволяет моделировать как активное, так и пассив-

ное нагружение грунта, однако условие подобия напряженного и деформированного состояния ограничивает область применения деформационной теории пластичности рамками соосного нагружения среды.

В теории пластического течения, развитой в трудах Рейсса и Прандтля, приращения деформаций рассматриваются как сумма приращений упругих и пластических деформаций:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p.$$

При этом предполагается подобие напряженного и изменения деформированного состояния. Приращение упругих деформаций определяется в соответствии с формулами обобщенного закона Гука, а приращение тензора пластических деформаций принимается пропорциональным тензору напряжений:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p = d\lambda G_{ij},$$

где G_{ij} – некоторый симметричный тензор, соосный с тензором напряжений σ_{ij} .

Обобщая теорию пластического течения, Друкер и Праггер ввели понятие пластического потенциала f , представляющего собой функцию напряжений, частная производная от которой пропорциональна приращению пластических деформаций:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Это условие означает перпендикулярность вектора приращений пластических деформаций поверхности пластического потенциала. В простейшем случае поверхность пластического потенциала является стационарной поверхностью, совпадающей с предельной поверхностью. Для описания предельных поверхностей твердых сред, не обладающих способностью к увеличению сопротивления сдвигу при увеличении гидростатического давления, используются критерий Треска, не включающий промежуточное главное напряжение:

$$\tau_{\max} - c = 0,$$

или критерий Мизеса, включающий промежуточное главное напряжение:

$$\tau_0 - c_0 = 0.$$

При решении геотехнических задач используются критерии, в которых отражается увеличение сопротивления сдвигу при увеличении гидростатического давления, Кулона-Мора:

$$\tau_{\max} - c - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \operatorname{tg}\varphi = 0;$$

либо Мизеса-Шлейхера-Боткина:

$$\tau_0 - c_0 - \sigma_0 \operatorname{tg}\varphi_0 = 0.$$

Для учета вида напряженного состояния Г.А.Гениев преобразовал условие Мизеса-Шлейхера-Боткина к выражению (С.С. Вялов, 1978):

$$\tau_i = \operatorname{tg}\psi(H + \sigma_v)(1 + k \cos \omega_\sigma),$$

$$\text{где } \operatorname{tg}\psi = 6\sqrt{3} \sin \frac{\varphi_0}{9 - \sin^2 \varphi_0}; \cos \omega_\sigma = \frac{3\sqrt{3}I_3}{2\sqrt{I_2^3}}; H = \frac{c_0}{\operatorname{tg}\varphi_0}; k = \sin \frac{\varphi_0}{3};$$

а Г.М. Ломизе и А.Л. Крыжановский предложили условие предельного состояния в виде:

$$\tau_i = f\left(\frac{\sigma_v}{N^\alpha}\right),$$

$$\text{где } N = \frac{I_3}{I_1^3}.$$

Если поверхность пластического потенциала совпадает с предельной поверхностью (или поверхностью текучести), то закон течения называют ассоциированным, в противном случае неассоциированным. Частным случаем неассоциированного закона течения является равнобъемное течение.

В условиях сложного нагружения решение упругопластических задач возможно только численными методами. Модели, предполагающие линейно упругую работу грунта в пределах стационарной поверхности, реализованы методом конечных элементов А.К. Бугровым (1974), О. Зенкевичем (1975), А.Б. Фадеевым (1987, 1994), И.И. Меркуловым и В.Н. Парамоновым (1990, 1994) и многими другими исследователями. Такие модели позволяют производить расчеты оснований фундаментов за пределами расчетного сопротивления грунта, обладают тем достоинством, что в расчетах используются механические характеристики, определяемые традиционными методами в инженерно-геологических изысканиях. Недостатком таких подходов является неучет таких особенностей работы грунта, как накопление необратимых объемных деформаций, нелинейная работа грунта и дилатантные явления при давлениях, превышающих предельного сопротивления грунта сдвигу, что существенно ограничивает область применения моделей.

Дальнейшее совершенствование моделей грунта в рамках теории пластического течения состояло в учете нелинейной работы грунта в допредельной стадии. С этой целью было введено понятие «поверхности нагружения», ограничивающей область упругой работы грунта в пространстве главных напряжений или инвариантов напряжений. При изменении напряжений за пределы поверхности нагружения происходит накопление как упругих, так и пластических деформаций, сопровождаясь увеличением размеров поверхности нагружения и, соответственно, увеличением области упругой работы грунта. Современные экспериментальные исследования в области совершенствования моделей упрочняющейся среды направлены на установление поверхности нагружения для сред, с которыми работает исследователь.

Одной из первых работ, в которой предложена модель изотропно упрочняющейся среды, является работа D. Drucker, E. Gibson, J. Henkel (1957), которые представили поверхность текучести в пространстве главных напряжений неподвижным конусом, замкнутым подвижной сферической поверхностью нагружения. В качестве параметра упрочнения предлагалась величина накопленных объемных пластических деформаций.

В работе A.W. Jenike and R.T. Shield (1959) рассмотрена модель грунта, в которой упругая работа грунта ограничивалась расширяющейся поверхностью Кулона, замкнутая подвижной плоскостью, параллельной гидростатической оси. В качестве параметра упрочнения предлагалась величина $c \cdot ctg\phi$.

Существенное влияние на развитие теории упрочнения грунтов оказали работы K.H. Roscoe and J.B. Burland (1968), разработавшие энергетические модели (Cam-Clay), построенные на концепции критического состояния. Модель Cam-Clay послужила основой для дальнейших модификаций шатровых моделей.

В осях инвариантов тензора напряжений – интенсивности касательных напряжений q и среднего давления p – предельная линия представлялась уравнением $q = Mp$. Предполагалось, что изотропная компрессия под давлением p образует область упругой работы грунта OAB (рис. 1.1). Поверхность нагружения AB является поверхностью пластического потенциала, для которой справедлив ассоциированный закон течения. Активное нагружение грунта приводит к накоплению пластических деформаций и расширению поверхности нагружения. Для определения функции, описывающей поверхность нагружения, предполагается, что работа на приращениях пластических деформаций равна:

$$dA = p \sqrt{d\epsilon_{vp}^2 + (Md\gamma_p)^2} .$$

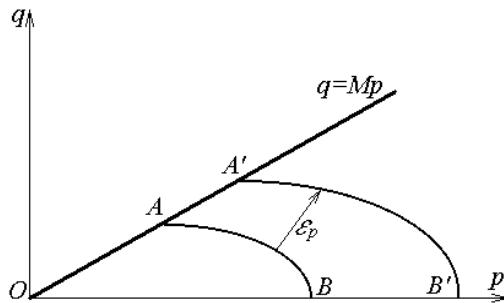


Рис. 1.1. Графическое изображение модели Cam-Clay
в осях инвариантов тензора напряжений.

В результате авторами модели получена эллиптическая поверхность нагружения, большая ось которой совпадает с гидростатической осью, а малая ось заканчивается на предельной поверхности.

В работе Т. Танака (1979) шатровая модель дополнена новой предельной поверхностью \$AC\$ (рис. 1.2). Область упругой работы грунта ограничивается границами \$OCAB\$. Активное нагружение грунта на участке \$AB\$ приводит к накоплению пластических деформаций, расширению поверхности нагружения и увеличению предельной поверхности.

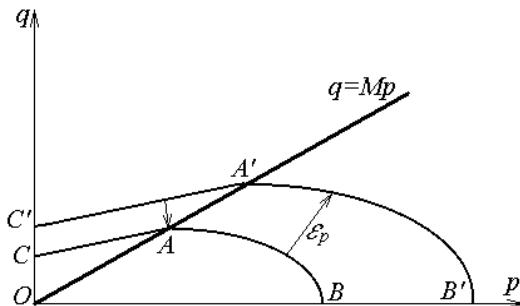


Рис. 1.2. Графическое изображение модели Т. Танака.

Нагружение до предельной поверхности приводит к пластическому деформированию, подчиняющемуся принципу нормальности к предельной поверхности, разрыхлению грунта и снижению эквивалентного давления, соответствующего текущей плотности грунта, т.е. к разупрочнению. Таким образом, модель Т. Танака позволила в дополнение к модели Cam-Clay учитывать разрыхление и разупрочнение грунта.

S. Pietruszczak and Z. Mroz (1980) для учета эффектов разрыхления и разупрочнения грунта предложили дополнительную предельную поверхность аппроксимировать уравнением эллипса, являющегося про-

должением поверхности нагружения (рис. 1.3).

Варианты упрочняющихся моделей с эллиптической поверхностьюю нагружения рассмотрены в работах В.Г. Федоровского и В.Ф. Александровича (1985), А.Б. Фадеева и А.Л. Прегера (1994) и др. В.Г. Федоровским (1985) выполнен подобный обзор упрочняющихся моделей грунтов.

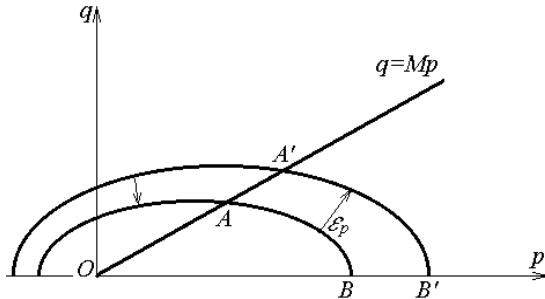


Рис. 1.3. Графическое изображение модели S. Pietruszczak and Z. Mroz.

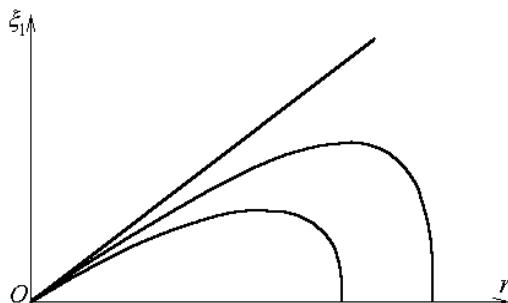


Рис. 1.4. Графическое изображение модели Б.И. Дидуха.

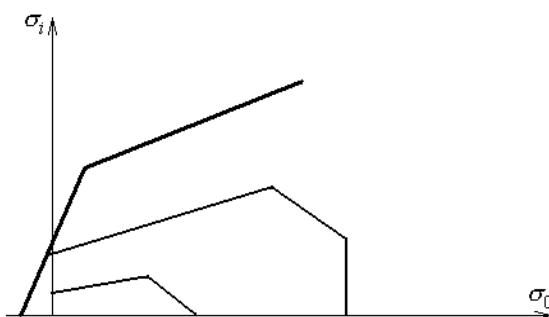


Рис. 1.5. Графическое изображение модели Ю.К. Зарецкого.

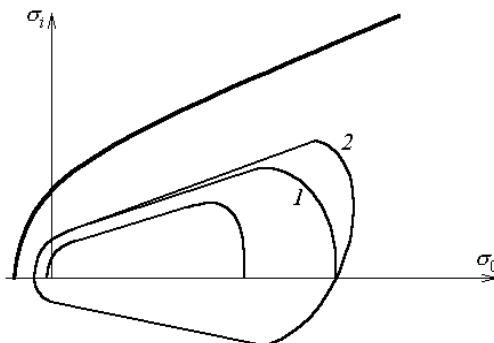


Рис. 1.6. Графическое изображение модели В.С. Коровкина:
1 – поверхность нагружения при знакопостоянной нагрузке;
2 – то же, при знакопеременной нагрузке.

По результатам трехосных испытаний песков вариант упругопластической упрочняющейся модели грунта предложен Б.И. Диудхом (1987). Гладкая ассоциированная поверхность нагружения в плоскости инвариантов тензора напряжений $\xi_1 = \frac{I_1}{\sqrt{3}}$, $r = \sqrt{2I'_2}$ полностью рас-

полагается ниже предельной поверхности (рис. 1.4). Такая модель позволяет описывать эффекты отрицательной дилатансии при работе грунта в допредельной стадии.

Для исключения наблюдавшихся в лабораторных опытах отклонений от ассоциированности течения по отношению к поверхности нагружения в работах Ю. К. Зарецкого (1988, 1989) поверхность нагружения предлагается аппроксимировать кусочно-гладкими участками (рис. 1.5). В пределах каждого участка закон течения принимается ассоциированным, а в сингулярных точках формально используется правило Койттера для ассоциированного закона течения.

Для отражения работы грунта при знакопеременных нагрузках используются законы кинематического упрочнения. При этом поверхность нагружения (рис. 1.6) становится несимметричной относительно гидростатической оси (В.С. Коровкин, 1994, K. Runneson, 1978, и др.)

Использование упрочняющихся моделей в геотехнических расчетах связано с большими математическими трудностями, что вызвано с существенной нелинейностью определяющих соотношений. Поэтому для решения практических задач широкое применение получил метод конечных элементов. Поскольку при использовании ассоциированного закона течения матрица связи напряжений и деформаций симметрична, численное решение геотехнических задач на основе упрочняющихся моделей может быть реализовано как итерационными методами, так и методами переменных матриц жесткости, компоненты которой зависят

от текущего напряженно-деформированного состояния.

Как указывалось выше, механическое поведение грунта описывать-ся любой моделью только приближенно, а какое-либо усложнение математической модели приводит к увеличению числа параметров, определяемых экспериментально, что при значительном естественном разбросе физико-механических свойств грунта приводит не к увеличению, а к снижению достоверности прогноза механического поведения грунта в натурных условиях. Разработка новой модели грунта будет оправданной, если она описывает дополнительные особенности работы грунта, не учитываемые иными моделями и оказывающие существенный эффект на результаты расчета.

В связи с этим представляется, что наиболее ценными для практического использования являются модели, имеющие наименьшее количество параметров и отражающие качественные особенности работы грунтов.

1.2. Численная реализация модели упрочняющейся среды

1.2.1. Конечноэлементная реализация варианта упрочняющейся модели типа *Cam-Clay*

Рассмотрим принцип построения системы конечноэлементных уравнений для варианта упрочняющейся среды, за основу которой принята модель Cam-Clay. Выбор модели работы грунта при произвольном нагружении осуществлен в соответствии со следующими положениями, принятыми в теории упрочняющихся сред и подтвержденными многочисленными лабораторными экспериментами. Деформации грунта полностью обратимы, если уровень напряжений, действующих на элементарный объем грунта, не выходит за пределы поверхности нагружения. Активное нагружение грунта приводит к развитию как обратимых, так и необратимых деформаций, а также к изменению положения поверхности нагружения AOB (рис. 1.7). В соответствии с правилом Койттера предполагается, что вектор пластических деформаций ε_p направлен перпендикулярно поверхности нагружения, т.е. последняя является поверхностью пластического потенциала.

Поскольку грунты в природном состоянии имеют существенную неоднородность и вариабельность физико-механических свойств, в качестве поверхности нагружения примем эллиптическую поверхность типа Cam-Clay, основанную в работах K.H. Roscoe and J.B. Borland энергетически и определяемую достаточно простым уравнением. Согласно концепции критического состояния, поверхность нагружения в

координатах напряжений представляет собой поверхность, соответствующую одинаковым объемным пластическим деформациям грунта при различных сочетаниях напряжений, действующих на элемент среды. Точка пересечения поверхности нагружения с гидростатической осью определяет величину гидростатического давления, при действии которого накопленные объемные пластические деформации среды равны объемным пластическим деформациям для любой точки шатра.

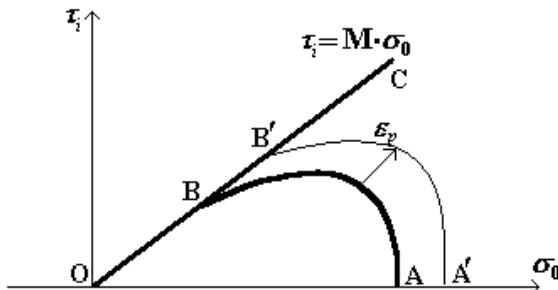


Рис. 1.7. Моделирование упрочняющихся сред.

Предполагается, что упрочнение грунта имеет изотропный характер, а в качестве параметра упрочнения принимается величина накопленных объемных пластических деформаций.

Линия критического состояния в координатах инвариантов тензора напряжений представляет собой прямую линию с уравнением:

$$\tau_i = M\sigma_0, \quad (1.1)$$

где τ_i – интенсивность касательных напряжений;

σ_0 – среднее напряжение.

Для анализа эффектов, описываемых такой моделью грунта в условиях плоской деформации, введем плоские инварианты тензора напряжений $\tau_{nn} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, $p = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$. Обозначим эквивалентное объемное давление $\sigma_0 = 2a_0$, где a_0 – гидростатическое давление, соответствующее точке пересечения поверхности нагружения с поверхностью критического состояния.

Таким образом, область упругих деформаций грунта I (рис. 1.8) будет ограничена предельной прямой с уравнением (1.1) и эллиптической поверхностью нагружения с уравнением:

$$F = \frac{(p - a_0)^2}{a_0^2} + \frac{\tau^2}{a_0^2 M^2} = 0, \quad (1.2)$$

или

$$a_0 = \frac{p^2}{2} + \frac{\tau}{2pM^2}. \quad (1.3)$$

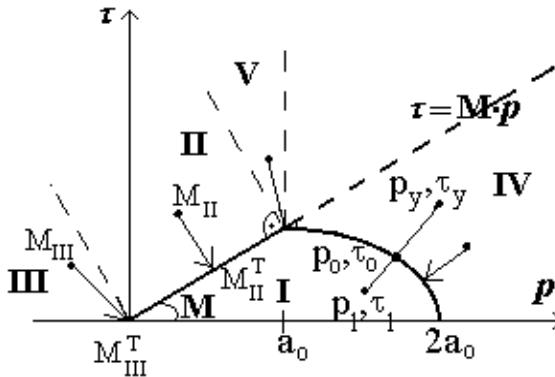


Рис. 1.8. Определение теоретических напряжений при постановке задачи в рамках классической модели Cam-Clay.

Численная реализация модели связана с существенной физической нелинейностью, поскольку при малых нагрузках необратимые деформации грунта значительно преобладают над обратимыми. Для решения физически нелинейной задачи выбран метод «начальных напряжений», сущность которого состоит следующем. Пусть график зависимости напряжений и деформаций имеет некоторое криволинейное очертание (рис. 1.9). В результате линейно упругого решения могут быть определены «упругие» напряжения σ_e , значения которых отличаются от реальных («теоретических») напряжений σ_t , которые имела бы среда при рассчитанном уровне деформаций. Разница между «упругими» и «теоретическими» напряжениями рассматривается как невязка и прикладывается к системе конечных элементов в виде дополнительных узловых сил. В результате повторного упругого решения с новым вектором узловых сил «упругие» напряжения окажутся ближе к «теоретическим». Новая невязка добавляется к системе конечноэлементных уравнений и итерационная процедура продолжается до тех пор, пока разница между «упругими» и «теоретическими» напряжениями не будет превышать заданной точности. Величина «теоретических» напряжений определяется моделью грунта.

Для принятой модели грунта в плоскости инвариантов тензора напряжений можно выделить пять характерных областей, для которых следует определить соответствующую процедуру поиска «теоретических» напряжений. Очевидно, что для области упругой работы грунта I (рис. 1.8) в процессе упругого решения определяются истинные напряжения. В этом случае «теоретические» напряжения будут равны

«упругим», а невязка – нулю.

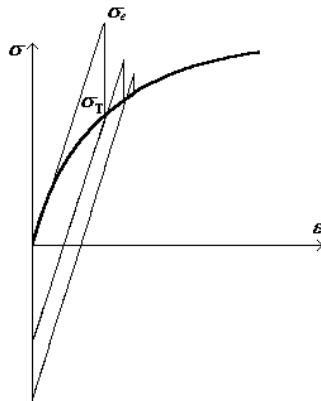


Рис. 1.9. Реализация физически нелинейных моделей методом начальных напряжений.

Для определения «теоретических» напряжений сформируем конечно-разностную систему уравнений для приращений инвариантов напряжений, которые определяются как разница между напряжениями, полученными в результате упругого решения ($\Delta p_e, \Delta \tau_e$), и фиктивными напряжениями, определяемыми накоплением необратимых деформаций ($K\Delta\varepsilon_{vp}, 2G\Delta\gamma_p$):

$$\begin{cases} \Delta p = \Delta p_e - K\Delta\varepsilon_{vp}, \\ \Delta\tau = \Delta\tau_e - 2G\Delta\gamma_p, \end{cases} \quad (1.4)$$

где, в соответствии с правилом Койттера для ассоциированного закона течения, приращения пластических деформаций равны:

$$\Delta\varepsilon_{vp} = \Delta\lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial p};$$

$$\Delta\gamma_p = \Delta\lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \tau},$$

где $\Delta\lambda$ – параметр, характеризующий накопление пластических деформаций.

Область II представляет собой область работы грунта в предельном состоянии. Производные уравнения ассоциированной поверхности пластического потенциала, описываемого выражением (1.1), по соответствующим инвариантам напряжений равны:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = -M ;$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = 1 .$$

Тогда выражение (1.4) может быть записано в виде:

$$\begin{cases} \Delta p = \Delta p_e + KM\Delta\lambda ; \\ \Delta\tau = \Delta\tau_e - 2G\Delta\lambda ; \end{cases}$$

или в развернутой форме:

$$\begin{cases} p_T - p_0 = p_e - p_0 + KM\Delta\lambda , \\ \tau_T - \tau_0 = \tau_e - \tau_0 - 2G\Delta\lambda , \end{cases}$$

где p_0 и τ_0 – исходные напряжения, определяемые точкой пересечения траектории нагружения среды с поверхностью критического состояния. Сократив левые и правые части выражений на исходные напряжения, получим выражения для определения «теоретических» напряжений:

$$\begin{cases} p_T = p_e + KM\Delta\lambda \\ \tau_T = \tau_e - 2G\Delta\lambda \end{cases} . \quad (1.5)$$

Для определения параметра $\Delta\lambda$ подставим выражения (1.5) в уравнение поверхности пластического потенциала, совпадающей с поверхностью текучести (1.1):

$$\tau_e - 2G\Delta\lambda - Mp_e - KM^2\Delta\lambda = 0 .$$

Отсюда параметр $\Delta\lambda$ будет равен:

$$\Delta\lambda = \frac{\tau_e - Mp_e}{2G + KM^2} .$$

Таким образом, теоретические напряжения в области II могут быть найдены из выражений:

$$\begin{cases} p_T = p_e + KM \frac{\tau_e - Mp_e}{2G + KM^2} \\ \tau_T = \tau_e - 2G \frac{\tau_e - Mp_e}{2G + KM^2} \end{cases} . \quad (1.6)$$

Определим границы области II. Уравнение прямой $M_{II}-M_{II}^T$ имеет

вид:

$$\frac{\tau - \tau_T}{\tau_e - \tau_T} = \frac{p - p_T}{p_e - p_T},$$

или

$$(\tau - \tau_T) \cdot (p_e - p_T) = (p - p_T) \cdot (\tau_e - \tau_T). \quad (1.7)$$

Подставив выражения (1.6) в (1.7), получим соотношение:

$$-(\tau - \tau_T) \cdot KM = (p - p_T) \cdot 2G. \quad (1.8)$$

Для определения уравнения границы между областями II и III подставим в выражение (1.8) нулевые значения теоретических напряжений τ_T и p_T :

$$-\tau KM = p \cdot 2G,$$

откуда получим уравнение граничной линии:

$$\tau_e = -p_e \cdot \frac{2G}{KM}.$$

Для определения границы между зонами II и V в выражение (1.8) следует подставить значения теоретических напряжений:

$$p_T = a_0,$$

$$\tau_T = Ma_0,$$

$$-(\tau_e - Ma_0) \cdot KM = (p_e - a_0) \cdot 2G$$

Таким образом, зона II ограничена третьей прямой с уравнением:

$$\tau_e = -(p_e - a_0) \frac{2G}{KM} + Ma_0,$$

а «теоретические» напряжения вычисляются из выражений (1.6), если удовлетворяются следующие неравенства:

$$\tau_e > Mp_e; \tau_e > -p_e \cdot \frac{2G}{KM}; \tau_e < -(p_e - a_0) \frac{2G}{KM} + Ma_0.$$

Область III представляет собой область растяжения. Для этой области «теоретические» напряжения определяются сингулярной точкой:

$$p_T = \tau_T = 0.$$

Область растяжения определяется условием:

$$\tau_e < -p_e \cdot \frac{2G}{KM}.$$

Область IV представляет область упрочнения грунта и определяется следующими границами:

$$p_e > a_0;$$

$$\tau_e > \sqrt{\left(a_0 - \frac{p}{2}\right) \cdot 2p_e M^2}.$$

Производные функции, определяющей поверхность пластического потенциала, по соответствующим инвариантам тензора напряжений, равны:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{2\tau}{a_0^2 M^2};$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{2(p - a_0)}{a_0^2},$$

а отношение производных:

$$\frac{\partial F / \partial \tau}{\partial F / \partial p} = \frac{2\tau}{a_0^2 M^2} \cdot \frac{a_0^2}{2(p - a_0)} = \frac{\tau}{M^2 (p - a_0)^2}.$$

В качестве параметра упрочнения принимаются накопленные объемные пластические деформации. Связь между объемными пластическими деформациями и эквивалентным давлением, равным величине $2a_0$, аппроксимируется логарифмической функцией:

$$\varepsilon_{vp} = B \cdot \ln\left(\frac{2a_o}{2a'_o}\right)$$

при гидростатических давлениях, превышающих величину $2a'_o$. Введя обозначение $A = -B \cdot \ln(2a'_o)$, придем к более удобной форме записи:

$$\varepsilon_{vp} = A + B \cdot \ln(2a_o), \quad (1.9)$$

Бесконечно малое приращение объемных пластических деформаций сопровождается изменением положения поверхности пластического потенциала. Тогда приращение объемной пластической деформации равно дифференциальному выражению (1.9):

$$d\epsilon_{vp} = B \cdot \frac{da_0}{a_0}$$

В соответствии с правилом Койттера для ассоциированного закона течения приращение пластических деформаций сдвига равно:

$$d\gamma_p = \frac{\partial F/\partial \tau}{\partial F/\partial p} \cdot d\epsilon_{vp} = \frac{\tau}{M^2(p-a_0)^2} \cdot \frac{B}{a_0} \cdot da_0$$

Тогда приращение инвариантов напряжений будет определяться следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} dp = dp_e - KB \frac{da_o}{a_o} \\ d\tau = d\tau_e - \frac{2GB\tau}{M^2(p-a_o)a_o} da_o \end{cases};$$

или, заменяя дифференциальную форму записи конечно-разностным аналогом первого порядка и сокращая левую и правую части выражений на величину исходных напряжений p_0 и τ_0 , получим соотношения:

$$\begin{cases} p_T = p_e - KB \frac{a_T - a_0}{a} \\ \tau_T = \tau_e - \frac{2GB\tau}{M^2(p-a)a} (a_T - a_0) \end{cases}. \quad (1.10)$$

В выражения (1.10) входят неизвестные величины τ , p , a , определяемые новым положением поверхности нагружения. Использование вместо них начальных значений a_0 существующей поверхности текущести и напряжений τ_0 и p_0 как точек пересечения траектории нагружения среды с поверхностью a_0 бессмысленно на траекториях, сильно отклоняющихся от ортогональной траектории в точке шатра с координатами τ_0 , p_0 . В то же время использование вместо этих величин средних конечно-разностных аналогов ($a_{cp} = (a_0 + a_T)/2$ и т. д.) приводит к системе трансцендентных уравнений, численное решение которых приводит к значительному увеличению времени решения задачи. Как показали численные эксперименты, при шаговом нагружении удобнее использовать величины:

$$\tau_c = (\tau_0 + \tau_e)/2, p_c = (p_0 + p_e)/2, a_c = (a_0 + a_T)/2,$$

где

$$a' = \frac{p_e}{2} + \frac{\tau_e^2}{2p_e M^2}.$$

В этом случае система уравнений (1.10) может быть записана в виде:

$$\begin{cases} p_T = p_e - KB \frac{a_T - a_0}{a_c} \\ \tau_T = \tau_e - \frac{2GB\tau_c}{M^2(p_c - a_c)a_c}(a_T - a_0) \end{cases},$$

или, опуская промежуточные преобразования:

$$\begin{cases} p_T = p_e - KB \frac{p_T}{2a_c} - KB \frac{\tau_T}{2a_c p_T M^2} + KB \frac{a_0}{a_c} \\ \tau_T = \tau_e - \frac{GB\tau_c p_T}{M^2(p_c - a_c)a_c} - \frac{GB\tau_c \tau_T^2}{M^4 p_T (p_c - a_c)a_c} + \frac{2GB\tau_c a_0}{M^2(p_c - a_c)a_c} \end{cases}.(1.11)$$

Для сокращения записи выражений введем следующие обозначения:

$$F = \frac{KB}{2a_c}; H = GB \frac{\tau_c}{M^2(p_c - a_c)a_c};$$

$$A_1 = p_e + KB \frac{a_0}{a_c} = p_e + 2Fa_0; A_2 = 1 + \frac{KB}{2a_c} = 1 + F;$$

$$A_3 = \frac{KB}{2a_c M^2} = \frac{F}{M^2}; B_1 = \tau_e + 2GB \frac{\tau_c a_0}{M^2(p_c - a_c)a_c} = \tau_e + 2Ha_0;$$

$$B_2 = GB \frac{\tau_c}{M^2(p_c - a_c)a_c} = H; B_3 = \frac{B_2}{M^2} = \frac{H}{M^2}.$$

Тогда систему уравнений (1.11) можно записать в более компактной форме:

$$\begin{cases} A_1 - A_2 p_T - A_3 \frac{\tau_T^2}{p_T} = 0 \\ B_1 - \tau_T - B_2 p_T - B_3 \frac{\tau_T^2}{p_T} = 0 \end{cases};$$

или:

$$\begin{cases} \frac{A_1}{A_3} - \frac{A_2}{A_3} p_T = \frac{\tau_T^2}{p_T} \\ \frac{B_1}{B_3} - \frac{\tau_T}{B_3} - \frac{B_2}{B_3} p_T = \frac{\tau_T^2}{p_T} \end{cases}. \quad (1.12)$$

Приравнивая левые части выражений (1.12), получим линейное уравнение, связывающее «теоретические» напряжения τ_T и p_T :

$$\frac{A_1}{A_3} - \frac{A_2}{A_3} p_T = \frac{B_1}{B_3} - \frac{\tau_T}{B_3} - \frac{B_2}{B_3} p_T,$$

откуда объемные «теоретические» напряжения равны:

$$p_T = \frac{\frac{A_1}{A_3} - \frac{B_1}{B_3} + \frac{\tau_T}{B_3}}{\frac{A_2}{A_3} - \frac{B_2}{B_3}}.$$

Введя дополнительные обозначения:

$$K_1 = \frac{\frac{A_1}{A_3} - \frac{B_1}{B_3}}{\frac{A_2}{A_3} - \frac{B_2}{B_3}} = \frac{A_1 B_3 - A_3 B_1}{A_2 B_3 - A_3 B_2}; \quad K_2 = \frac{A_3}{A_2 B_3 - A_3 B_2}$$

получим линейное соотношение, связывающее «теоретические» объемные напряжения с «теоретическими» касательными:

$$p_T = K_1 + K_2 \tau_T. \quad (1.13)$$

Подставив выражение (1.13) в первое уравнение системы (1.12), получим квадратное уравнение относительно «теоретических» касательных напряжений τ_T :

$$A_1 - A_2 K_1 - A_2 K_2 \tau_T - \frac{A_3 \tau_T^2}{K_1 + K_2 \tau_T} = 0,$$

или

$$(A_2 K_2^2 + A_3) \tau_T^2 + (2 A_2 K_1 K_2 - K_2 \cdot A_1) \cdot \tau_T + (A_2 \cdot K_1^2 - K_1 \cdot A_1) = 0. \quad (1.14)$$

Введя обозначения:

$$D_1 = A_2 K_2^2 + A_3; \quad D_2 = 2 A_2 K_1 K_2 - K_2 \cdot A_1; \quad D_3 = A_2 \cdot K_1^2 - K_1 \cdot A_1$$

получим квадратное уравнение относительно «теоретического» инварианта касательных напряжений в сокращенной записи:

$$D_1 \tau_{\text{T}}^2 + D_2 \tau_{\text{T}} + D_3 = 0.$$

Решением квадратного уравнения будет значение «теоретического» инварианта касательного напряжения τ_{T} (первый корень):

$$\tau_{\text{T}} = \frac{-D_2 + \sqrt{D_2^2 - 4D_1D_3}}{2D_1}. \quad (1.15)$$

Вычислив из выражения (1.13) «теоретическое» значение объемных напряжений, можно определить положение «теоретической» поверхности текучести:

$$a_{\text{T}} = \frac{p_{\text{T}}}{2} + \frac{\tau_{\text{T}}^2}{2p_{\text{T}}M^2}. \quad (1.16)$$

Эта поверхность будет поверхностью с параметром a_0 для следующего итерационного цикла.

Для вычисления значений средних инвариантов тензора напряжений τ_c и p_c , используемых при определении «теоретических» напряжений, необходимо знать величины τ_0 и p_0 пересечения траектории нагрузления с поверхностью нагружения. Уравнение текущей поверхности нагружения имеет вид:

$$a_0 = \frac{p_0}{2} + \frac{\tau_0^2}{2p_0M^2}, \quad (1.17)$$

а уравнение прямой траектории нагружения при элементарном изменении напряжений:

$$\frac{\tau_0 - \tau_1}{\tau_e - \tau_1} = \frac{p_0 - p_1}{p_e - p_1},$$

где τ_1 и p_1 – напряжения в элементе перед очередным шагом нагружения (итерацией). Тогда

$$p_0 = p_1 + \frac{p_e - p_1}{\tau_e - \tau_1} \cdot \tau_0 - \frac{p_e - p_1}{\tau_e - \tau_1} \cdot \tau_1. \quad (1.18)$$

Введем обозначения

$$k = \frac{p_e - p_1}{\tau_e - \tau_1}; C = p_1 + k\tau_1.$$

Тогда уравнение прямой траектории нагружения примет вид:

$$p_0 = k\tau_0 + C. \quad (1.19)$$

Подставим выражение (1.19) в уравнение эллиптической поверхности нагружения (1.17):

$$2a_0 = k\tau_0 + C + \frac{\tau_0^2}{(k\tau_0 + C)M^2};$$

отсюда получим квадратное выражение относительно ординаты пересечения траектории нагружения с поверхностью нагружения:

$$\tau_0^2(1 + M^2k^2) + \tau_0 \cdot 2kM^2(C - a_0) + CM^2(C - a_0) = 0. \quad (1.20)$$

Введя обозначения:

$$E_1 = 1 + M^2k^2; E_2 = 2kM^2(C - a_0); E_3 = CM^2(C - a_0).$$

выражение (3.20) запишем в виде:

$$E_1 + \tau_0^2 + E_2\tau_0 + E_3 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение найдем координату τ_0 пересечения траектории нагружения с поверхностью нагружения (первый корень):

$$\tau_0 = \frac{-E_2 + \sqrt{E_2^2 - 4E_1E_3}}{2E_1},$$

и подставив ее в выражение (1.19) определим вторую координату p_0 .

Область V представляет собой область течения с сингулярной точкой. Она ограничена прямой с уравнением $\tau_e = -\frac{2G}{KM}(p_e - a_0) + Ma_0$ границы с областью II и вертикальной прямой $p_e = a_0$ границы с V зоной. Теоретические напряжения для этой области равны координатам сингулярной точки:

$$p_T = a_0,$$

$$\tau_T = Ma_0.$$

Заметим, что изложенная процедура поиска начальных напряжений для рассмотренной упрочняющейся модели является общей при любой форме записи связи между гидростатическим давлением и объемными пластическими деформациями. Требуется только вычислить соответствующие коэффициенты из выражений:

$$F = K \cdot \frac{d\epsilon_{vp}}{da}; H = 2G \frac{\partial F / \partial \tau}{\partial F / \partial p} \cdot \frac{d\epsilon_{vp}}{da}.$$

Логарифмическая функция не проходит через начало координат $p - \epsilon_v$, а пересекает ось p в положительной четверти. Поэтому при численной реализации эта точка пересечения с осью p определяет условную начальную поверхность нагружения.

1.2.2. Алгоритм конечно-элементного решения задач с применением модели упрочняющейся среды

Для построения системы конечно-элементных уравнений воспользуемся условием равенства мощностей контурных сил на скоростях перемещений и внутренних напряжений на скоростях деформаций.

Мощность контурных сил F на скоростях перемещений v равна скалярному произведению:

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (1.21)$$

а мощность внутренних напряжений на скоростях деформаций:

$$N = \int_{\hat{V}} \sigma : D dV, \quad (1.22)$$

где D – тензор скорости деформаций, а символом $(:)$ обозначен оператор свертки по индексам.

Приравнивая правые части выражений (1.21) и (1.22), получим:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \int_{\hat{V}} \sigma : D dV. \quad (1.23)$$

Представим основные соотношения в матричной форме. В выражении (1.23) время t может быть исключено, тогда под вектором \vec{v} может подразумеваться вектор бесконечно малых приращений перемещений, а под тензором D – тензор бесконечно малых приращений деформаций.

Для аппроксимации поверхности перемещений и приращений перемещений выберем треугольный элемент первого порядка. Конечный элемент n определяется узловыми точками i, j, k и прямолинейными границами. Приращения перемещений каждого узла представляются в виде компонент по направлениям соответствующих осей:

$$\{v_i\} = \{du_i \quad dv_i\}^T.$$

Для n -го элемента вектор приращений перемещений содержит 6 компонент:

$$\{v\}_n = \{d\delta_i \quad d\delta_j \quad d\delta_k\}^T = \{du_i \quad dv_j \quad du_j \quad dv_j \quad du_k \quad dv_k\}^T.$$

Приращения перемещений любой точки внутри элемента должны однозначно определяться этими шестью величинами. Для треугольного конечного элемента первого порядка приращения перемещений du_m , dv_m внутри элемента аппроксимируются линейными полиномами:

$$du_m = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y;$$

$$dv_m = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y.$$

Значения шести констант α_1 - α_6 легко найти из двух систем уравнений, подставив вместо x и y координаты соответствующих узлов:

$$\begin{cases} du_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ du_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ du_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \end{cases}$$

Выразив коэффициенты α_1 , α_2 , α_3 через приращения узловых перемещений, окончательно получим выражения для определения приращений узловых перемещений в любой точке элемента через узловые приращения перемещений:

$$du_m = 1/(2\Delta) \cdot ((a_i + b_i x + c_i y)du_i + (a_j + b_j x + c_j y)du_j + (a_k + b_k x + c_k y)du_k),$$

где $a_i = x_j y_k - x_k y_j$, $b_i = y_j - y_k$, $c_i = x_k - x_j$.

Остальные коэффициенты получаются циклической перестановкой индексов i, j, k .

Введя обозначение $N_i = 1/(2\Delta) \cdot (a_i + b_i x + c_i y)$, называемое функцией формы элемента, получим выражение для приращения перемещений любой точки внутри элемента в направлении оси x через узловые приращения перемещений:

$$du_m = N_i du_i + N_j du_j + N_k du_k.$$

Аналогично можно получить выражение для приращений перемещений dv_m точек элемента в направлении оси y :

$$dv_m = N_i dv_i + N_j dv_j + N_k dv_k.$$

Величина 2Δ равна определителю:

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix},$$

т.е. удвоенной площади треугольного элемента.

В стандартной матричной форме выражения для перемещений внутри элемента можно записать в виде:

$$\{\delta_m\} = \begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \end{Bmatrix} = [N]\{\delta_k\} = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i & u_j & u_k & v_i & v_j & v_k \end{Bmatrix}^T,$$

а для приращений перемещений:

$$\{v_m\} = [N][d\delta]$$

Деформация в любой точке элемента в условиях плоской деформации охарактеризуется тремя составляющими:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тогда горизонтальная деформация определяется через перемещения узлов элемента в соответствии с выражением:

$$\epsilon_x = \frac{\partial(N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k)}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} u_k.$$

Аналогично получим выражения для вертикальных деформаций и деформаций сдвига:

$$\epsilon_y = \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} v_k,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} v_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} v_k + \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} u_k,$$

или в матричной форме:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_y & \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^T = [B]\{\delta\},$$

а для приращения деформаций:

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} d\epsilon_x & d\epsilon_y & d\gamma_{xy} \end{Bmatrix}^T = [B]\{v\},$$

где

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \end{bmatrix} - \text{матрица производных}$$

функций формы.

Тогда соотношение (1.23) можно записать в матричной форме в виде:

$$\{v\}^T \{F\} = \int_V \{v\}^T [B]^T \{\sigma\} dV. \quad (1.24)$$

При линейной интерполяции функции приращений перемещений в выражении (1.24) можно заменить интегрирование по объему (площади) умножением на объем (площадь). Тогда сократив левую и правую части выражения на $\{v\}^T$, получим выражение, имеющее смысл уравнения равновесия:

$$\{F\} = [B]^T \{\sigma\} \Delta. \quad (1.25)$$

Для реализации модели упрочняющейся среды в рамках теории пластического течения систему уравнений (1.25) сформулируем в инкрементальной форме. Для условий бесконечно малых деформаций изменение геометрических размеров элементов грунта пренебрежимо мало по сравнению с исходными размерами, а изменение нагрузки будет вызывать только изменение компонент вектора напряжений. Тогда выражение (1.25) может быть записано в следующем виде:

$$\{\Delta F\} = [B]^T \{\Delta \sigma\} \Delta. \quad (1.26)$$

Приращения напряжений определяются из выражения (1.4) как разница приращений напряжений, определяемых обратимой и необратимой частями тензора деформаций, а полная система уравнений (1.26) будет приведена к следующему виду:

$$\begin{aligned} \{\Delta F\} &= [B]^T \{\Delta \sigma\} \Delta = [B]^T (\{\Delta \sigma_e\} - \{\Delta \sigma_p\}) \Delta = [B]^T (\{\Delta \sigma_e\}) \Delta - [B]^T (\{\Delta \sigma_p\}) \Delta = \\ &= [B]^T (\{\Delta \sigma_e\}) \Delta - [B]^T (\{\sigma_e\} - \{\sigma_T\}) \Delta. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Напряжения $\{\sigma_e\}$ представляют собой суммарные напряжения, накопленные в процессе нагружения среды, а «теоретические» напряже-

ния $\{\sigma_t\}$ определяются в соответствии с методикой, приведенной в разделе 1.2.1.

«Упругие» напряжения вычисляются в предположении справедливости закона Гука. Для условий плоской деформации эти зависимости записываются в виде:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} [\varepsilon_x(1-\nu) + \varepsilon_y\nu];$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} [\varepsilon_y(1-\nu) + \varepsilon_x\nu];$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy},$$

или в матричной форме:

$$\{\sigma_e\} = [D]\{\varepsilon\},$$

где $\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T$,

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \text{ – матрица упругих свойств.}$$

Приращения напряжений $\{d\sigma_e\}$ будут равны:

$$\{d\sigma_e\} = [D]\{d\varepsilon\},$$

а система конечноэлементных уравнений для упругопластической среды:

$$\{\Delta F\} + \{\Delta F_n\} = [B]^T [D][B]\{v\}\Delta = [K]\{v\}, \quad (1.28)$$

где $[K]$ – матрица жесткости системы элементов, а величина $\{\Delta F_n\}$ рассматривается как невязка к линейной системе уравнений, корректируемая на каждом шаге нагружения итерационным методом.

Общий алгоритм решения задач о нагружении упругопластической упрочняющейся среды может быть представлен следующим образом.

1. Формируется матрица жесткости системы и вектор приращений узловых нагрузок.

2. Обнуляется вектор накопленных напряжений $\{\sigma_n\}$.

3. Решается система уравнений (1.28), в результате чего вычисляет-

ся вектор приращений перемещений.

Цикл по числу элементов $i = 1, M$

4. По найденным приращениям перемещений вычисляются приращения деформаций и по закону Гука – приращения напряжений $\{\delta\sigma_e\}$.

5. Вычисляются суммарные осевые напряжения $\{\sigma_e\}$:

$$\{\sigma_e\} = \{\sigma_e\} + \{\delta\sigma_e\} - \{\sigma_h\}$$

6. Вычисляются суммарные главные напряжения σ_1 , σ_3 и угол их наклона к глобальным осям α .

7. Вычисляются инварианты напряжений τ и p .

8. Вычисляются «теоретические» инварианты напряжений в соответствии с изложенной в разделе 1.2.1 процедурой.

9. Вычисляются главные «теоретические» напряжения.

10. Вычисляются осевые «теоретические» напряжения по формулам:

$$\sigma_x^T = \sigma_1^T \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_3^T \cdot \sin^2 \alpha;$$

$$\sigma_{yx}^T = \sigma_1^T \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_3^T \cdot \cos^2 \alpha;$$

$$\tau_{xy}^T = 0,5 \cdot (\sigma_z^T - \sigma_3^T) \cdot \sin 2\alpha.$$

Использование угла α обеспечивает соосность тензора приращений пластических деформаций и тензора напряжений.

11. Вычисляются приращения начальных напряжений

$$\{\Delta\sigma_h\} = \{\sigma_e\} - \{\sigma_T\}.$$

12. Вычисляются накопленные начальные напряжения

$$\{\sigma_h\} = \{\sigma_h\} - \{\Delta\sigma_h\}.$$

13. Вычисляется невязка

$$\{\Delta F_h\} = [B]^T \{\Delta\sigma_h\} \cdot \Delta.$$

14. Невязка добавляется к вектору приращений узловых сил.

15. Проверка достигнутой точности решения. Если хоть один компонент напряжений $\{\Delta\sigma_h\}$ превышает заданную допустимую величину, то вводится признак необходимости продолжения итераций.

Конец цикла по элементам

16. Если признак продолжения итераций введен, то выполняются операции начиная с п. 3.

1.2.3. Определение коэффициентов уравнения зависимости объемных пластических деформаций от гидростатического давления

Рассматриваемая модель упрочняющейся среды выгодно отличается минимальным количеством параметров, определяемых из лабораторных испытаний. Параметры A , B , K определяются из трехосных испытаний с медленным приложением гидростатического давления и последующей разгрузкой образца. Параметр M определяется в стабилометре из испытаний на раздавливание или девиаторное нагружение. Ниже приводится процедура вычисления параметров A , B методом наименьших квадратов по результатам трехосных испытаний образцов грунта при нагружении-разгружении гидростатическим давлением.

Нагружение образца гидростатическим давлением приводит к увеличению объемной деформации (график 1, рис. 1.10), складывающейся из упругой и пластической составляющих, а разгрузка – к частичному восстановлению объема (график 2). Для выделения пластической составляющей выполним параллельный перенос разгрузочного графика таким образом, чтобы он исходил из начала координат (график 3, рис. 1.10). Тогда заштрихованная область будет представлять область пластического деформирования грунта.

По разнице вертикальных координат графиков развития полных и упругих объемных деформаций несложно построить кривую зависимости объемных пластических деформаций от гидростатического давления (рис. 1.11).

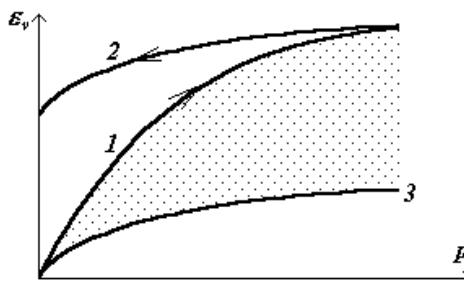


Рис 1.10. Графики изменения объемных деформаций при гидростатическом нагружении и разгружке образцов грунта.

Модуль объемных упругих деформаций K определяется по графику 3 и в рамках принятой линейной модели теории упругости для обратимых деформаций вычисляется из соотношения:

$$K = \frac{p}{\varepsilon_{ve}}.$$

Для определения методом наименьших квадратов параметров логарифмической функции, аппроксимирующей зависимость между объемными пластическими деформациями и гидростатическим давлением, введем обозначение:

$$\ln(p) = C.$$

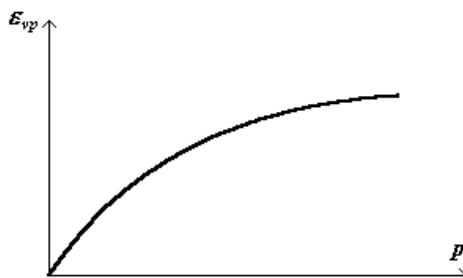


Рис 1.11. Характерный график изменения объемных пластических деформаций грунта при гидростатическом нагружении.

В результате имеем следующее линейное уравнение:

$$\varepsilon_{vp} = A + BC.$$

Производные функции по коэффициентам A и B равны:

$$\frac{\partial \varepsilon_{vp}}{\partial A} = 1;$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{vp}}{\partial B} = C.$$

В соответствии с требованием метода наименьших квадратов квадрат ошибки должен быть минимальным, т.е.

$$U = \sum_{i=1}^n [\varepsilon_{vp}^i - (A - BC_i)]^2 = \min.$$

Отсюда имеем систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n [\varepsilon_{vp}^i - A - BC_i] = 0 \\ \sum_{i=1}^n [(\varepsilon_{vp}^i - A - BC_i) \cdot C_i] = 0 \end{cases};$$

или

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{vp}^i - A \cdot n - B \sum_{i=1}^n C_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n \varepsilon_{vp}^i \cdot C_i - A \sum_{i=1}^n C_i - B \sum_{i=1}^n C_i^2 = 0 \end{cases}.$$

Введя обозначения

$$Y = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{vp}^i; Z = \sum_{i=1}^n C_i; F = \sum_{i=1}^n C_i^2; G = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{vp}^i \cdot C_i.$$

получим систему линейных уравнений с двумя неизвестными A и B :

$$\begin{cases} Y - A \cdot n - B \cdot Z = 0 \\ G - A \cdot Z - B \cdot F = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим окончательно выражения для коэффициентов:

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n [\varepsilon_{vp}^i \cdot \ln(p_i)] - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \varepsilon_{vp}^i \cdot \sum_{i=1}^n \ln(p_i)}{\sum_{i=1}^n [\ln(p_i)]^2 - \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{i=1}^n \ln(p_i) \right]^2};$$

$$A = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_{vp}^i - n \sum_{i=1}^n \ln(p_i) \right].$$

1.2.4. Оценка деформируемости глинистого грунта в трехосном приборе и сравнение с расчетными данными

С целью оценки возможности применения рассмотренной модели упрочняющейся среды для описания работы глинистого грунта под нагрузкой выполнены лабораторные испытания в стабилометре конструкции «ЛИИЖТ ГБ-6». Испытания проводились на образцах ленточных пылеватых суглинков тяжелых и глин серо-коричневого цвета мягкопластичной и текучей консистенции, отбиравшихся из основания экспериментального полигона Сооружений защиты Санкт-Петербурга

от наводнений. Грунты имели следующие физические характеристики: $\gamma=16,8\ldots17,8 \text{ кН/м}^3$, $\gamma_d=11,2\ldots12,3 \text{ кН/м}^3$, $W=0,454\ldots0,515$, $e=1,2\ldots1,46$, $S_r=0,98\ldots1$, $W_p=0,225\ldots0,278$, $W_L=0,405\ldots0,524$, $I_p=0,18\ldots0,246$, $I_L=0,75\ldots1,27$.

В первой серии испытаний к образцам ступенями прикладывалось гидростатическое давление до величины 0,18 МПа и 0,368 МПа, затем ступенями производилось снижение гидростатического давления до нуля. Шаги нагружения и разгрузки принимались равными 0,01; 0,02; 0,045; 0,091; 0,18; 0,368 МПа. Каждая ступень нагрузки выдерживалась до тех пор, пока скорость вертикальных перемещений штампа не снижалась до 0,01 мм/час. Поскольку стабилометр конструкции «ЛИИЖТ ГБ-6» позволяет измерять только вертикальные перемещения, объемная деформация образца вычислялась в предположении, что деформации сжатия одинаковы во всех направлениях, т.е. соответствуют теоретическим представлениям о сжимаемости однородной среды в условиях изотропной компрессии. Таким образом, предполагалось, что радиальные деформации ε_r равны вертикальной деформации ε_z .

Результаты испытаний приведены на рис. 1.12 в виде графиков зависимости полной объемной деформации от всестороннего давления. Учитывая большой разброс физических свойств грунтов природного сложения, результаты механических испытаний также имеют достаточно широкий разброс: максимальная зафиксированная объемная деформация при давлении 0,18 МПа почти в два раза превышает минимальную зафиксированную объемную деформацию при том же давлении.

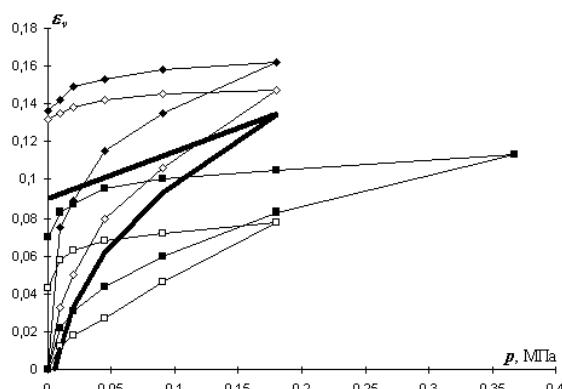


Рис. 1.12. Траектории изменения объемных деформаций грунта по результатам гидростатического нагружения в трехосном приборе: сплошная жирная линия – расчетная кривая.

Однако процесс деформирования образцов имеет подобный характер. Наибольшее приращение объемных деформаций происходит на первых ступенях нагружения, а по мере увеличения нагрузки приращение объемной деформации снижается. Разгрузка образца приводит к набуханию грунта, причем интенсивность увеличения объема образца увеличивается по мере приближения давления к нулевому значению.

Выполнив параллельный перенос разгрузочных графиков, получим кривые зависимости упругих объемных деформаций от гидростатического давления (рис. 1.13). Характер этих кривых свидетельствует о резком снижении восстановливающихся деформаций по мере уплотнения грунта. Постоянный модуль объемного сжатия, вычисленный в соответствии с требованиями метода наименьших квадратов из выражения

$$K = \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{\sum_{i=1}^n \varepsilon_{vei}},$$

составил $K=4,8$ МПа. Зависимость упругих объемных деформаций от гидростатического давления имеет существенно нелинейный характер, поэтому линейная аппроксимация зависимости является условной и полученный объемный модуль может быть использован в расчетах только в интервале объемных давлений, прикладываемых к образу в эксперименте (рис. 1.13).

Вычитая из полных объемных деформаций обратимую составляющую, получим графики зависимости объемных пластических деформаций от гидростатического давления (рис. 1.14). Параметры аппроксимирующей логарифмической функции равны:

$$A = 0,1384, B = 0,02814.$$

Приведенные на рис. 1.12-1.14 расчетные графики, построенные по результатам конечноэлементных расчетов в осесимметричной постановке, находятся в пределах экспериментальных графиков и, учитывая значительный естественный разброс механических свойств грунта, достаточно хорошо для практических целей отражают эффекты гидростатического нагружения и разгрузки грунта.

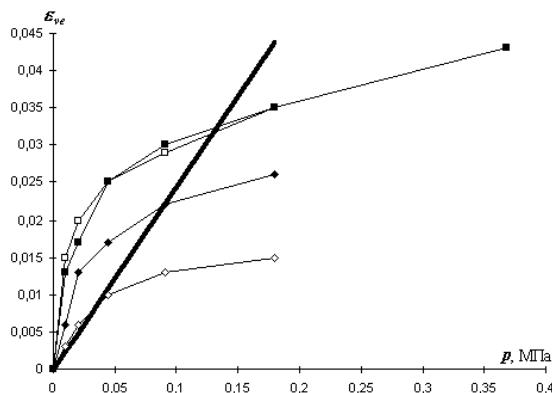


Рис. 1.13. Графики зависимости обратимой составляющей объемной деформации по результатам испытаний в трехосном приборе: жирная линия – график линейной функции, аппроксимирующей зависимость обратимой объемной деформации от гидростатического давления.

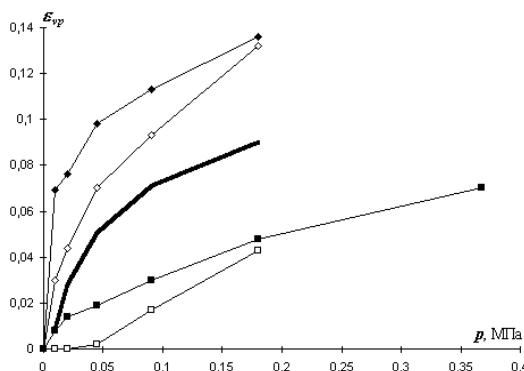


Рис. 1.14. Графики зависимости необратимой составляющей объемной деформации по результатам испытаний в трехосном приборе: жирная линия – график логарифмической функции, аппроксимирующей зависимость объемной пластической деформации от гидростатического давления.

Вторая серия экспериментов выполнялась по схеме раздавливания. Образцы грунта предварительно уплотнялись всесторонним давлением 0,05; 0,1 и 0,15 МПа. Затем ступенями производилось увеличение вертикального давления до разрушения образцов. При разрушении наблюдалось либо бочкообразование, либо ясно выраженный скол в одном направлении с неясно выраженной плоскостью скольжения во втором направлении. Угол плоскостей скольжения с вертикалью составлял 38–36°. Угол внутреннего трения грунтов по результатам испытаний составил $\varphi=17^\circ$, удельное сцепление $c=0,039$ МПа. При этом

параметр M линии критического состояния в интервале гидростатических давлений 0,1...0,2 МПа составит 0,488...0,675, или в среднем около 0,58.

На рис. 1.15 приведены результаты трехосных испытаний и расчетные кривые зависимости дополнительной осадки штампа от величины дополнительного вертикального давления на образец (без учета перемещений и давления на стадии гидростатического обжатия).

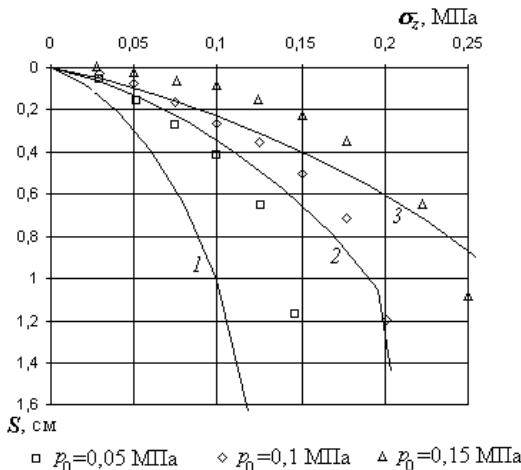


Рис. 1.15. Графики зависимости вертикальных перемещений штампа от вертикальной нагрузки при раздавливании образцов в стабилометре (сплошными линиями показаны расчетные графики, условными знаками – экспериментальные данные): 1 – начальное гидростатическое давление $p_0=0,05$ МПа; 2 – $p_0=0,1$ МПа; $p_0=0,15$ МПа.

Предельное дополнительное вертикальное давление на образец, при котором произошло разрушение грунта, в экспериментах составило 0,17 МПа при начальном гидростатическом давлении $p_0=0,05$ МПа; 0,205 МПа при $p_0=0,1$ МПа и 0,245 МПа при $p_0=0,15$ МПа.

Результаты экспериментов свидетельствуют о том, что нелинейная зависимость между напряжениями и деформациями (или усилиями и перемещениями) наблюдается и при нагрузках, меньших предельной. Этот эффект, не описываемый моделями упругопластических сред, предполагающих упругую работу грунта в границах предельных поверхностей, достаточно хорошо отражается рассмотренной моделью упрочняющейся среды. Сравнивая результаты расчетов с экспериментальными данными, заметим, что расчетные графики, повторяя общую тенденцию зависимости осадок от вертикального давления, находятся ниже экспериментальных точек. Этот эффект может быть объяснен следующими причинами. Во-первых, образцы грунта вырезались из

разных гильз, отобранных из различных скважин экспериментального полигона, поэтому использованные в расчетах характеристики грунта следует признать условными. Во-вторых, осредненные упругие параметры грунта принимались постоянными и достаточно низкими, в то время в экспериментах на гидростатическое нагружение-разгружение при давлениях свыше 0,05 МПа наблюдается резкое снижение сжимаемости грунта (см. рис. 1.13).

1.3. Численная оценка эффектов, описываемых моделью упрочняющейся среды в условиях плоской деформации, при различных способах нагружения

С целью оценки характера деформирования упрочняющейся среды в условиях плоской деформаций, оценки точности решения при различных шагах разбиения нагрузки, а также сравнения с моделью идеально упругопластической среды выполнена серия численных экспериментов. Элементарный объем грунта размерами 1×1 нагружался по различным траекториям:

1. гидростатическое нагружение с частичной разгрузкой;
2. компрессия;
3. раздавливание в двухосных условиях;
4. девиаторное нагружение;

Характеристики среды приняты по экспериментальным данным: $E=5$ МПа, $\nu=0,3$, $M=0,58$, $A=0,1384$, $B=0,02814$. Упругий модуль объемного сжатия для условий плоской деформации вычислялся из выражения:

$$K_n = E/[2(1+\nu)(1-2\nu)] = 4,8 \text{ МПа.}$$

Результаты расчетов приводятся в виде траекторий изменения напряжений и деформаций в координатах плоских инвариантов тензоров напряжений и деформаций:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}; \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_3; \gamma = \varepsilon_1 - \varepsilon_3.$$

Численное моделирование гидростатического нагружения и разгрузки образца с использованием модели упрочняющейся среды приведены в разделе 1.2.4. Для условий гидростатического нагружения несложно получить аналитическое выражение зависимости объемных деформаций от гидростатического давления:

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma}{K_n} + A + B \ln \sigma.$$

Оценим влияние шага нагружения на точность расчетов. В тестовом примере нагружение выполнено до гидростатического давления $p=1,0$ МПа. Расчеты выполнены с мелким шагом нагружения 0,01 МПа и с грубым шагом 0,1 МПа. Во всех расчетах численные результаты получаются ниже аналитических, однако уменьшение шага нагружения уменьшает разницу между аналитическими и численными результатами. Основная доля ошибок накапливается на первых шагах нагружения, где нагрузочная кривая существенно отличается от упругой. Нагрузочно-разгрузочная кривая, построенная при разбиении максимального давления на 100 интервалов, представлена на рис. 1.16, а, практически совпадает с аналитической кривой. Численные значения в этом случае ниже аналитических не более чем на 0,2%. При разбиении максимального давления на 10 интервалов в начале кривой разница численной и аналитической кривой достигает 30%, снижаясь по мере увеличения давления до 6%. Численные эксперименты показывают, что в практических расчетах полную нагрузку достаточно разбивать на 20 интервалов, при этом ошибка расчетов не превышает 2–4%.

Гидростатическое нагружение-разгрузка упругой и идеально упругопластической среды приводят к пропорциональному изменению объемных деформаций, причем нагрузочная и разгрузочная траектории совпадают (рис. 1.16, б). Здесь и далее на графиках нагрузления упругопластической среды не введены цифровые значения, т.к. качественный характер графиков идентичен для любых соотношений деформационных и прочностных свойств грунта.

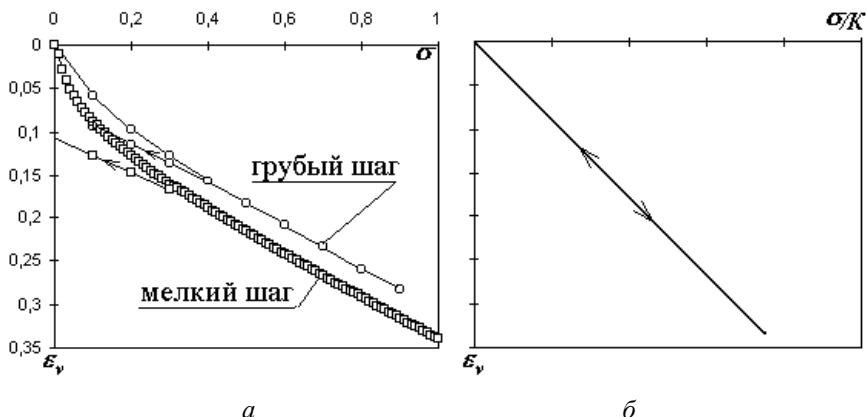


Рис. 1.16. Работа среды в условиях гидростатического нагружения и разгрузки: *а* – модель среды с учетом упрочнения; *б* – упругая и идеально упругопластическая модель.

Таким образом, модель упрочняющейся среды, в отличие от упругой и идеально упругопластической среды, при гидростатическом нагружении позволяет описывать нелинейную зависимость деформаций от давления, а при разгрузке позволяет учитывать неполное восстановление деформаций.

Точность расчетов при произвольном нагружении можно повысить при более грубых шагах нагружения, если траекторию нагружения при переходе с текущего положения поверхности нагружения в новое положение принять не по прямой, а по ортогональной траектории к семейству эллиптических поверхностей шатра. Несложно получить уравнение семейства ортогональных траекторий:

$$p = \sqrt{\frac{\tau^{M^2}}{D} - \frac{\tau^2}{(2 - M^2)}},$$

где константа интегрирования определяется из выражения:

$$D = \frac{\tau_0^{M^2}}{p_0^2 + \frac{\tau_0^2}{2 - M}}.$$

по координатам точек τ_0 и p_0 , через которую проходит данная траектория семейства.

Уравнение ортогональной траектории разрешимо относительно параметра p и трансцендентно относительно τ . Поэтому для решения этого уравнения требуется применять численные методы, существенно увеличивающие трудоемкость процедуры расчетов на цикле итераций. Как показывают численные эксперименты, время решения задач при линеаризации траектории нагружения и разбиении нагрузки на мелкие шаги в несколько раз ниже, чем при аппроксимации участков траектории нагружения ортогональными функциями.

Несложно убедиться, что ошибка расчетов тем ниже и скорость сходимости итерационного процесса тем быстрее, чем меньше отличаются упругие характеристики грунта от нагрузочных.

В расчетах на компрессионное нагружение исследовалось изменение напряжений и деформаций при компрессии и декомпрессии образца грунта. Результаты тестовых расчетов с использованием модели упрочняющейся и идеально упругопластической среды приведены на рис. 1.17.

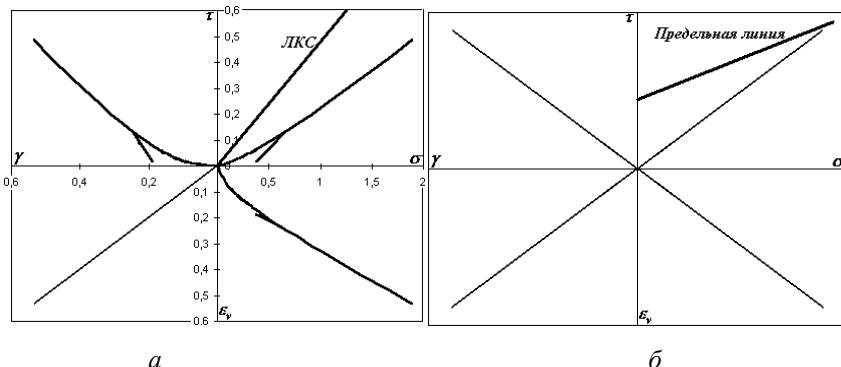


Рис. 1.17. Работа среды в условиях компрессионного нагружения и декомпрессии: *a* – модель среды с учетом упрочнения; *b* – идеально упругопластическая модель.

В процессе нагружения упрочняющейся среды начальная траектория нагружения в осях σ – τ практически совпадает с траекторией изотропной компрессии, т.е. горизонтальное давление практически равно вертикальному, а коэффициент бокового давления $\xi = \sigma_{\text{гор}}/\sigma_{\text{верт}}$ близок к единице. По мере увеличения вертикального давления происходит уменьшение коэффициента бокового давления, который в пределе стремится к значению $\xi \rightarrow \frac{\nu}{1-\nu}$, при этом траектория изменения напряжений никогда не пересекает линии критического состояния.

Кривая зависимости объемных деформаций от среднего давления повторяет кривую изотропной компрессии, называемую линией первичной изотропной компрессии. Зависимость деформаций сдвига от касательных напряжений также имеет криволинейный характер, а график в осях ϵ_v – γ имеет очевидный вид прямой линии с углом наклона к осям 45° , поскольку в компрессионных условиях $\epsilon_v = \gamma = \epsilon_z$. Разгрузка приводит к упругому набуханию грунта, происходящему по линейному закону, и отражает накопление остаточных деформаций.

При компрессионном нагружении и разгрузке идеальной упругопластической среды траектории изменения напряжений и деформаций имеют линейный характер (рис. 1.17,б), а коэффициент бокового давления равен постоянной величине $\xi = \frac{\nu}{1-\nu}$. В связи с этим следует отметить недостаток использования моделей идеально упругопластической среды при расчетах оснований. Формирование природного напряженного состояния происходит в условиях, близких к компрессионному нагружению. В численных расчетах природное напряженное

состояние формируется заданием узлам конечноэлементной сетки вертикальных усилий от собственного веса грунта. При определенных сочетаниях коэффициента Пуассона и прочностных характеристик расчетная траектория изменения напряжений может пересекать предельную поверхность, в результате чего нижние слои грунта уже на стадии формирования природных напряжений приходят в предельное состояние. Для исключения такого противоречия часто природное напряженное состояние формируется с коэффициентом Пуассона, близким к 0,5, т.е. траектория изменения природных напряжений принимается близкой к гидростатической. Однако в этом случае происходит существенное увеличение сопротивления грунта сдвигу по глубине, в то время как практика полевых испытаний слабых глинистых грунтов крыльчаткой показывает, что сопротивление сдвигу по глубине практически постоянно, либо увеличивается незначительно (А.Г. Шашкин, 1991).

Этих недостатков лишена модель упрочняющейся среды. Траектория изменения напряжений в компрессионных условиях всегда лежит ниже предельной линии, а разница предельного давления и касательных напряжений увеличивается незначительно по мере увеличения вертикальной нагрузки (см. рис. 1.17,а).

Оценка деформируемости грунта в условиях раздавливания и девиаторного нагружения в условиях плоской деформации выполнялась в следующей последовательности нагружения. На первом этапе к элементу ступенями прикладывалось гидростатическое давление 0,1; 0,2; 0,3 и 0,4 МПа. На втором этапе при раздавливании шагами прикладывалось вертикальное давление до достижения предельной прямой; при девиаторном нагружении прикладывалось вертикальное сжимающее и горизонтальное растягивающее давления одинаковой интенсивности.

Анализ результатов решения для упрочняющейся среды показывает следующее (рис. 1.18). Увеличение касательных напряжений после предварительного уплотнения грунта приводит к дополнительному уменьшению объема грунта (эффект положительной дилатансии) до некоторого максимального значения, соответствующего достижению предельного напряженного состояния. Если по результатам расчетов в координатах $\sigma - \epsilon_v$ провести условную кривую, соединяющую точки с величиной максимального уменьшения объема, то она окажется одинаковой как при раздавливании, так и при девиаторном нагружении. Эта кривая определяет положение линии критического состояния в осях $\sigma - \epsilon_v$. При достижении предельной линии деформирование грунта происходит без изменения объема, что отвечает развитию пластических деформаций в сингулярной точке течения.

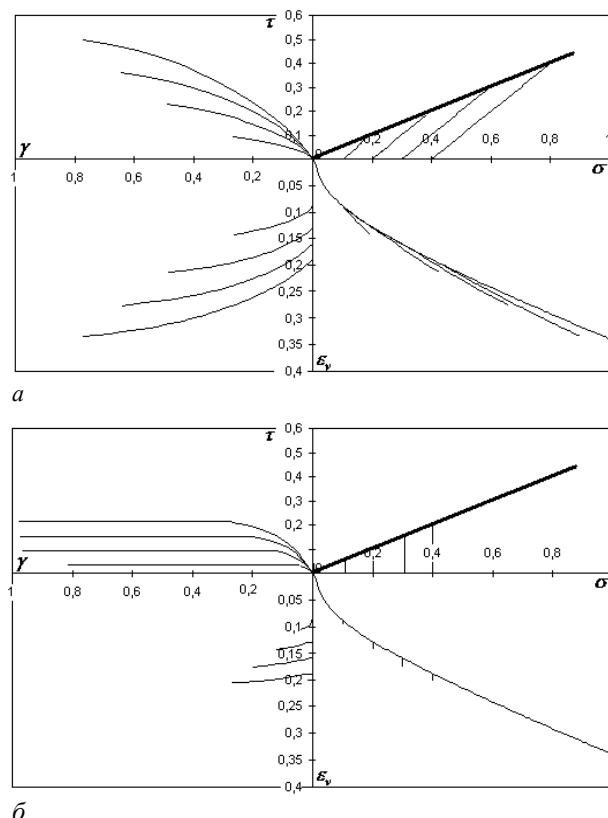


Рис. 1.18. Работа упрочняющейся среды в условиях раздавливания (*a*) и девиаторного нагружения (*б*).

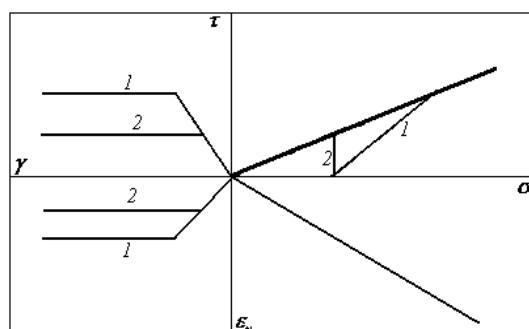


Рис. 1.19. Работа идеально упругопластической среды в условиях раздавливания (*1*) и девиаторного нагружения (*2*).

Очевидно, что эффекты отрицательной дилатансии для данной модели будут проявляться в случае, если нагружение элемента грунта осуществлять до линии критического состояния в пределах области II (см. рис. 1.8), т. к. на этом участке предельная поверхность является ассоциированной, однако этот эффект невозможно проанализировать при приложении к элементу давления, т. к. при достижении предельного состояния итерационный процесс становится расходящимся.

По результатам решения можно отметить, что нелинейная работа грунта происходит до достижения предельного состояния, в то время как для идеально упругопластической среды линейная связь между напряжениями и деформациями сохраняется вплоть до предельной линии без дополнительного изменения объема, после чего происходит равнообъемное течение среды (рис. 1.19).

Таким образом, рассмотренная модель упрочняющейся среды позволяет учитывать эффекты нелинейной работы грунта при нагрузках, меньших предельного значения, уменьшение и увеличение объема при действии касательных напряжений, автоматически включает в себя понятия «нагрузочный» и «разгрузочный» модули.

Недостатком рассмотренной модели упрочняющейся среды можно считать неучет эффектов падения сопротивления сдвигу переуплотненных грунтов после достижения пиковой прочности, известного из многочисленных лабораторных опытов, а также разупрочнения грунта при достижении предельного состояния. Кроме этого, линия критического состояния совпадает с предельной линией, в то время как опыты показывают, что предельная линия начинается не из начала координат в осях инвариантов напряжений, а пересекает ось касательных напряжений в точке с ординатой « c », равной удельному сцеплению. Эти эффекты могут быть учтены с использованием моделей, в которых вводится дополнительная предельная поверхность. Численная реализация одной из таких моделей приводится в следующем разделе.

1.4. Численная реализация модели упрочняющейся среды с учетом разупрочнения

Для описания разупрочнения среды и снижения сопротивления сдвигу предполагается, что упрочнение грунта сопровождается увеличением удельного сцепления грунта C (рис. 1.20). Удельное сцепление ассоциируется с величиной накопленных объемных пластических деформаций и определяется по углу наклона M_1 новой предельной прямой AB , являющейся одновременно поверхностью пластического потенциала. Область упругих деформаций ограничивается вертикальной прямой OA с уравнением $p=-C/5$ (согласно предложению А.Б. Фадеев-

ва, 1987), ограничивающей упругую работу грунта на растяжение, предельной линией AB , и шатровой поверхностью BC . Увеличение напряжений за пределы поверхности BC сопровождается развитием упругих и пластических деформаций, приводит к расширению области упругих деформаций. При достижении предельной поверхности AB происходит развитие пластических деформаций объема и формоизменения, разупрочнение грунта, приводящие к сужению шатровой поверхности и, соответственно, области упругой работы грунта.

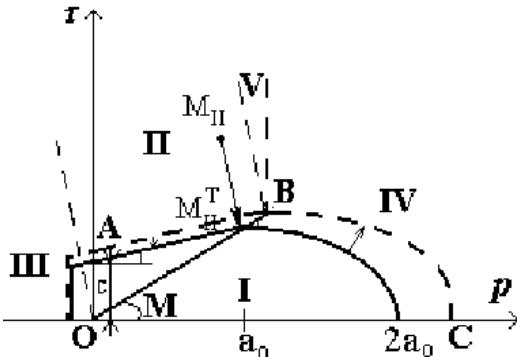


Рис. 1.20. Модель среды, учитывающая упрочнение и разупрочнение грунта.

Уравнение прямой AB имеет вид:

$$\tau = M_1 p + C . \quad (1.29)$$

Уравнение прямой OB :

$$\tau = Mp . \quad (1.30)$$

При $p=a_0$ прямые имеют одинаковую ординату. Приравняв правые части выражений (1.29) и (1.30) найдем величину удельного сцепления C , соответствующую накопленным объемным деформациям:

$$C = (M - M_1)a_0 .$$

Тогда уравнение поверхности пластического потенциала AB может быть выражено через параметры M и M_1 и эквивалентное объемное давление:

$$\tau = M_1 p + (M - M_1)a_0 . \quad (1.31)$$

В плоскости инвариантов тензора напряжений можно выделить пять характерных областей. Процедура вычисления теоретических напряжений в области IV и определения условий попадания точки в эти зоны выполняется так же, как показано в разделе 1.2.1.

Для области II определим параметр $\Delta\lambda$. Предельная поверхность AB , как сказано выше, совпадает с поверхностью пластического потенциала. Ее уравнение имеет вид:

$$F = \tau_T - M_1 p_T - C = 0. \quad (1.32)$$

Подставив выражения (1.4) в уравнение (1.32):

$$\tau_e - 2G\Delta\lambda - M_1(p_e + KM_1\Delta\lambda) - C = 0;$$

найдем параметр $\Delta\lambda$:

$$\Delta\lambda = \frac{\tau_e - M_1 p_e - C}{2G + KM_1^2}.$$

Приращение объемных напряжений p_e - p_T на очередном цикле итераций вызывает изменение объемных пластических деформаций разупрочнения. Предполагается, что разупрочнение грунта аппроксимируется той же логарифмической функцией, что и упрочнение грунта.

Для определения изменения объемных пластических деформаций при разупрочнении и положения шатровой поверхности предлагается следующая процедура. Положение новой поверхности нагружения еще неизвестно. Максимальное изменение напряжений при разупрочнении будет происходить таким образом, что напряжения p_T , τ_T будут находиться на линии критического состояния OB . При условии, что ассоциированной является поверхность AB , определим величину напряжений p_{T1} , τ_{T1} и параметр a_{0T1} , соответствующие максимальному разупрочнению:

$$\sigma_{T1} = \sigma_e + KMd\lambda;$$

$$\tau_{T1} = M\sigma_{T1};$$

$$a_{0T1} = \sigma_{T1}.$$

Такое изменение напряжений вызовет приращение объемных пластических деформаций:

$$d\varepsilon_{vp} = \frac{\tau_e + \frac{4GB}{M_1} \frac{a_{0T1} + a_0}{a_{0T1} - a_0} - (M - M_1)a_{0T1} - M_1\sigma_e + 2KBM_1 \frac{a_{0T1} + a_0}{a_{0T1} - a_0}}{2G + KM_1^2}.$$

Отсюда уточненное значение «теоретических» напряжений равно:

$$\sigma_T = \sigma_e + KM_1 d\varepsilon_{vp} - 2KB \frac{a_{0T1} + a_0}{a_{0T1} - a_0};$$

$$\tau_T = \tau_e - 2Gd\epsilon_{vp} + \frac{4GB}{M_1} \frac{a_{0T1} + a_0}{a_{0T1} - a_0}.$$

Найдем уравнения границ области II с областями III и V . Уравнение прямой $M(\Pi)-M_1(\Pi)$ имеет вид:

$$-(\tau_e - \tau_T)KM_1 = (p_e - p_T)2G. \quad (1.33)$$

Подставив в выражение (1.33) значения $\tau_T=0$; $p_T=0$ получим уравнение границы с областью III :

$$\tau_e = -p_e \frac{2G}{KM_1}.$$

Уравнение границы между областями II и V определим, подставив в выражение (1.33) значения $p_T=a_0$, $\tau_T=Ma_0$:

$$\tau_e = \frac{MM_1Ka_0 - 2G(p_e - a_0)}{KM}.$$

Для области растяжения III теоретические напряжения равны нулю:

$$\tau_T = 0; \quad p_T = 0.$$

Область V , соответствующая сингулярной точке, определяется границами:

$$p_e < a_0;$$

$$\tau_e > (MM_1Ka_0 - 2G(p_e - a_0))/KM_1.$$

Теоретические напряжения для этой области определяются координатами сингулярной точки:

$$\tau_T = Ma_0; \quad p_T = a_0.$$

Очевидно, что работа модели грунта, учитывающей упрочнение и разупрочнение, в условиях гидростатического и компрессионного наружения будет подобна работе упрочняющейся среды. Рассмотрим результаты решения задачи о раздавливании и девиаторном нагружении элемента грунта в условиях плоской деформации при различной степени предварительного уплотнения грунта. Величина дополнительного параметра M_1 в расчетах принималась равной 0,087, что соответствует углу внутреннего трения 5° .

Задача о раздавливании элемента грунта решалась в следующей последовательности. Сначала к элементу шагами прикладывалось гидростатическое давление $p=0,4$ МПа и производилась частичная разгрузка.

Затем элемент раздавливался вертикальным сжатием. Для получения эффекта разупрочнения вертикальное сжатие осуществлялось приложением к элементу вертикальных перемещений. Результаты решения задач приведены на рис. 1.21.

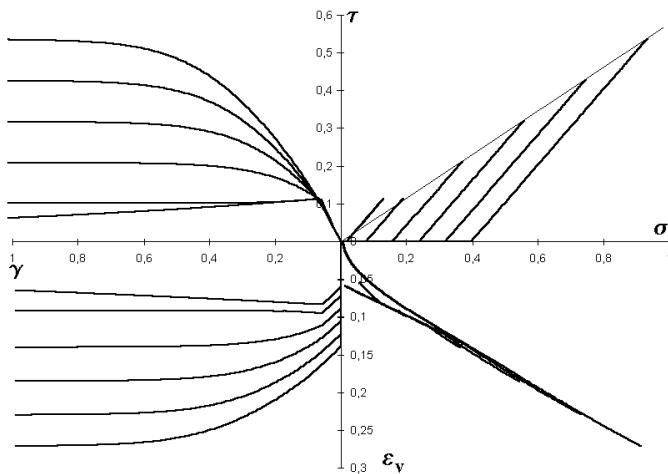


Рис. 1.21. Работа упрочняющейся-разупрочняющейся среды в условиях раздавливания.

При раздавливании элемента без разгрузки траектории изменения напряжений и деформаций имеют нелинейный характер. Если элемент предварительно разгружается таким образом, что траектория изменения напряжений достигает предельной линии в точке, превышающей величину давления $a_0=p/2$, то до пересечения поверхности шатра элемент работает упруго, после чего связь между напряжениями и деформациями становится нелинейной, причем участок упругой работы грунта тем больше, а деформации сдвига, при которых достигается предельное состояние, тем меньше, чем большей разгрузке подвергается образец. Если траектория раздавливания пересекает предельную прямую в точке с координатой $a_0=p/2$, то упругая работа элемента переходит в стадию равнообъемного течения без проявления эффектов нелинейности в допредельной стадии. При таких условиях разупрочнение грунта отсутствует и результаты решения полностью соответствуют результатам решения задачи о раздавливании упрочняющейся среды.

Если при раздавливании элемента среднее объемное давление не превышает значения $a_0=p/2$, то упругая работа в допредельной стадии переходит в стадию разупрочнения. При этом происходит набухание элемента, снижение сопротивления сдвигу, а размеры поверхности нагрузки и, соответственно, области упругой работы грунта умень-

шаются. При решении задачи заданием жестких вертикальных перемещений касательные напряжения и гидростатическое давление снижаются по траектории, совпадающей с траекторией раздавливания до пересечения с линией критического состояния, после чего образец переходит в стадию равнообъемного течения.

Задача о девиаторном нагружении выполнялась в условиях предварительного уплотнения различным гидростатическим давлением с последующей разгрузкой до одинакового давления $p=0,2$ МПа. Затем элементу задавались вертикальные сжимающие и горизонтальные растягивающие перемещения одинакового значения. Результаты расчетов приведены на рис. 1.22.

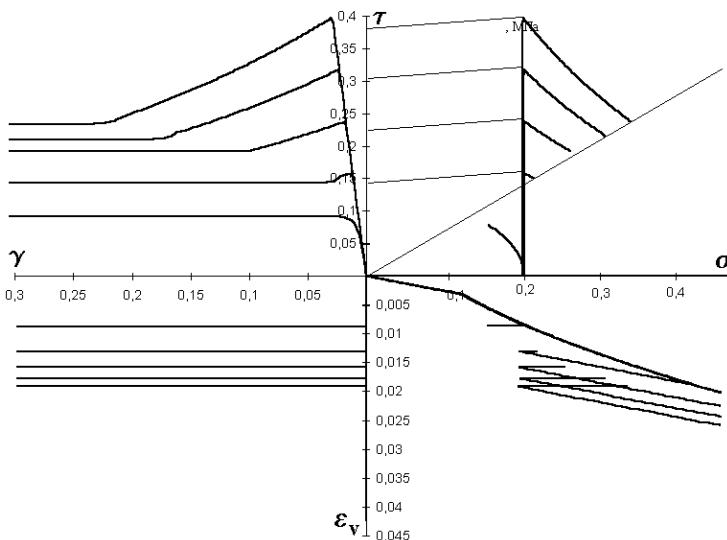


Рис. 1.22. Работа упрочняющейся-разупрочняющейся среды в условиях приложения девиатора деформаций.

В случае предварительного уплотнения давлением, не превышающим величины $2p$, траектория изменения напряжений пересекает предельную линию в точке с горизонтальной координатой, меньшей $2p$, следовательно, работа среды будет сопровождаться упрочнением и полностью соответствовать работе упрочняющейся среды. Заметим, что в случае предварительного уплотнения элемента давлением $2p$ приложение девиаторных перемещений будет отвечать сохранению объема элемента, чему соответствует криволинейный график изменения напряжений в осях инвариантов напряжений на рис. 1.22. Очевидно, что неизменность объема приведет к снижению величины гидростатического давления.

В случае предварительного уплотнения элемента гидростатическим давлением, превышающим величину $2p$, при девиаторном нагружении элемент работает упруго до достижения напряжениями предельной прямой, определяемой уравнением (1.29). Когда напряжения достигают предельных, происходит пластическое деформирование среды, сопровождающееся падением сопротивления сдвигу от пикового до остаточного значения. Разница пиковой и остаточной прочности тем выше, чем большим гидростатическим давлением был предварительно уплотнен элемент. В условиях девиаторного нагружения при сохранении постоянного объема элемента отрицательная дилатансия приводит к возрастанию гидростатического давления. По мере приближения напряжений к линии критического состояния интенсивность снижения сопротивления сдвигу уменьшается, а по достижении линии критического состояния течение принимает равнообъемный характер.

Таким образом, введение в модель упрочняющейся среды дополнительного параметра M_1 , определяющего положение новой предельной поверхности, позволяет учитывать в расчетах разупрочнение и снижение сопротивления переуплотненного грунта сдвигу от пикового до остаточного значения.

1.5. Оценка эффективности использования моделей упрочняющейся среды в практических расчетах

Модели упрочняющейся среды позволяют достаточно полно описывать качественный характер работы грунта при произвольном нагружении как в допредельной, так и в предельной стадии. При реальных давлениях по подошве фундаментов деформации грунта невелики, а предельное состояние грунта допускается достигать в незначительных областях для обеспечения практически линейной стадии работы грунта под нагрузкой. В связи с этим, очевидно, при расчете осадок фундаментов такие явления, как пластическое течение в предельном состоянии, отрицательная дилатансия, разупрочнение переуплотненных грунтов, не будут иметь существенного практического значения. Представляется, что модели упрочняющейся среды имеют наибольшую ценность для описания нелинейной работы грунта при давлениях, не превышающих сопротивления грунта сдвигу, а также для учета работы грунта при разгрузке. С целью оценки эффективности применения моделей упрочняющихся сред для решения практических задач сравним результаты решения задач о нагружении фундамента и об откопке котлована с использованием моделей упругой, идеально упруго-пластической и упрочняющейся среды.

1.5.1. Решение задачи о нагружении фундамента

Рассмотрим решение задачи о нагружении фундамента при давлениях, не превышающих расчетного сопротивления грунта. Фундамент – ленточный с глубиной заложения $d_f=2$ м и шириной подошвы $b=2$ м. Мощность сжимаемого слоя грунта ниже подошвы фундамента – 6 м. Грунт однородный с характеристиками для упрочняющейся модели: $\gamma=20$ кН/м³; $E=5$ МПа, $\nu=0,3$, $M=0,58$; $M_1=0,09$; $A=0,1384$; $B=0,02814$.

Задача решалась в три этапа. На первом этапе формировалось природное напряженное состояние грунта заданием шагами вертикальных узловых сил от собственного веса грунта. При этом грунт рассматривался как нормально уплотненный. Полная нагрузка от веса грунта разбивалась на 20 интервалов. На втором этапе из расчетной схемы удалялись элементы, заполняющие объем фундамента. Узлам с вертикальными координатами, равными глубине заложения подошвы фундамента, задавалось одинаковое вертикальное смещение $S=20$ см, разбитое на 20 интервалов, а узлам с горизонтальными координатами, равными полуширине фундамента, задавалось смещение $S=20$ см и абсолютно жесткая связь в горизонтальном направлении. Таким образом, фундамент представлялся как абсолютно жесткий. Фрагмент расчетной схемы в области фундамента для второго этапа решения задачи представлен на рис. 1.23. На третьем этапе моделировалась разгрузка фундамента удалением из расчетной схемы вертикальных связей по периметру фундамента.

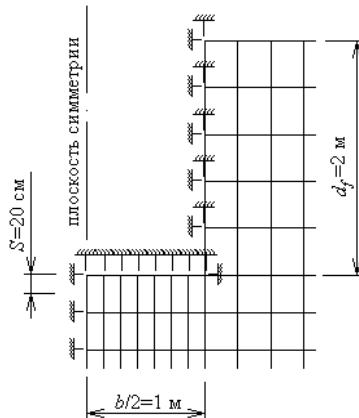


Рис. 1.23. Фрагмент расчетной схемы в области фундамента.

Для того чтобы расчет осадки фундамента с использованием идеально упругопластической среды можно было сравнивать с расчетом по упрочняющейся модели, механические характеристики идеально

упругопластической модели подбирались следующим образом. Суммарное вертикальное давление под подошвой фундамента, складывающееся из природного и дополнительного давления, составило 101–157 кПа с увеличением к краям фундамента, а суммарное горизонтальное 82–85 кПа. Среднее объемное давление (плоский инвариант) по подошве составляет 0,106 кПа. Этому давлению соответствует объемная деформация упрочняющейся среды, равная:

$$\varepsilon_v = p/K_{nn} + A + B \ln p = 0,106/4,8 + 0,1384 + 0,02814 \ln 0,106 = 0,097.$$

Тогда эквивалентный упругий объемный модуль будет равен:

$$K_{nn} = p/\varepsilon_v = 0,106/0,097 = 1,09 \text{ МПа.}$$

чему соответствует модуль деформации $E=1,13 \text{ МПа.}$

Параметру $M_1=0,09$ соответствует угол внутреннего трения $\varphi=5^\circ$, а величина удельного сцепления равна:

$$C = (M - M_1)/a_0 = (M - M_1)/p = 0,031 \text{ МПа.}$$

При таких характеристиках грунта и размерах фундамента расчетное сопротивление основания составляет 168 кПа (без учета коэффициентов условий работы), т.е. в 1,3 раза превышает среднее давление по подошве фундамента. Следовательно, нагрузки на фундамент находятся в пределах, допускаемых современной нормативной литературой.

Расчетное вертикальное давление по подошве фундамента на идеально упругопластическом основании составило от 90 кПа под центром до 115 кПа под краями фундамента при среднем давлении около 100 кПа и примерно на 25% ниже, чем давление по подошве фундамента на упрочняющейся среде.

Таким образом, принятые характеристики идеально упругопластической среды практически соответствуют давлениям, действующим по подошве фундаментов. Разница реактивных давлений по подошве фундамента при расчете по различным моделям свидетельствует о том, что идеально упругопластическая среда является более «жесткой» по сравнению с упрочняющейся, т.е. при одинаковых нагрузках осадка фундамента на упрочняющейся среде будет выше, чем на идеально упругопластической, и приведет к большей концентрации деформаций под подошвой фундамента.

Результаты расчетов приведены в виде эпюр вертикальных перемещений поверхности и эпюр вертикальных перемещений грунта по глубине ниже подошвы фундамента на рис. 1.24 и 1.25. Сравнивая результаты расчетов по двум моделям можно отметить, что использова-

ние модели упрочняющейся среды приводит к большей локализации деформаций в области фундамента и меньшему рассеянию деформаций на расстоянии от фундамента. В случае использования модели упрочняющейся среды нулевая осадка поверхности при образовании воронки оседания фиксируется на расстоянии около 4,5 м от фундамента, а за пределами воронки оседания вертикальные перемещения поверхности равны нулю. Для идеально упругопластической среды нулевая осадка поверхности отмечена на расстоянии около 8 м от фундамента, за пределами воронки оседания образуется упругий подъем дневной поверхности до 1,5 см у границы расчетной схемы.

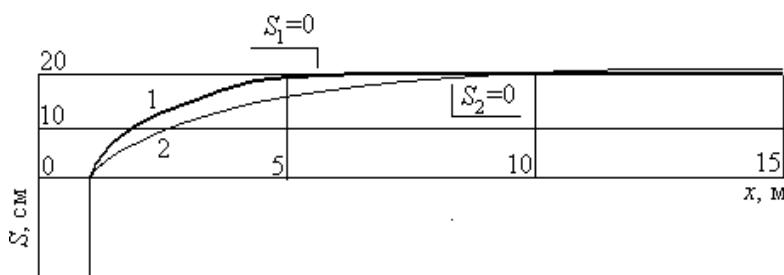


Рис. 1.24. Эпюры осадок дневной поверхности при нагружении фундамента: 1 – модель упрочняющейся среды;
2 – модель идеально упругопластической среды.

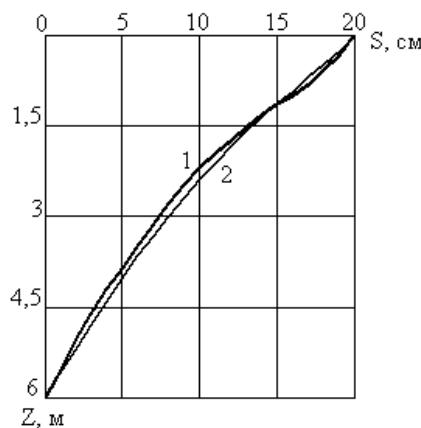


Рис. 1.25. Эпюры вертикальных перемещений по глубине ниже подошвы фундамента: 1 – упрочняющаяся среда;
2 – идеально упругопластическая среда.

Эпюры вертикальных перемещений грунта по глубине (рис. 1.25) практически одинаковы, однако, для упрочняющейся среды переме-

щения в большей степени концентрируются непосредственно под подошвой фундамента и в меньшей степени рассеиваются по глубине. Как показывают численные эксперименты, эффекты локализации деформаций грунта в областях, прилегающих к фундаменту, проявляются тем существеннее, чем меньше доля обратимых деформаций в полной деформации.

Разгрузка грунта приводит к набуханию и подъему дневной поверхности. При заданных условиях грунт ниже подошвы фундамента будет испытывать разгрузку вследствие снятия внешнего и природного давления. Расчетный подъем поверхности грунта под подошвой фундамента для упрочняющейся модели составил 7,5 см, причем около 2,5 см определяются снятием природного давления и 5 см – снятием дополнительной нагрузки, т.е. при снятии внешнего давления перемещения в 4 раза меньше, чем при приложении давления. Для идеально упругопластической модели, поскольку грунт работает в упругой стадии, отмечается полное восстановление деформаций. Подъем грунта под подошвой составил 30 см, из которых 20 см вызваны снятием внешней нагрузки и 10 см – снятием природного давления.

1.5.2. Решение задачи об откопке котлована

При откопке котлованов происходит снятие природного давления, в связи с чем наблюдается разуплотнение грунтов в верхней зоне основания. Величина подъема дна котлована зависит от времени выдержки котлована в открытом состоянии, а также от ширины котлована. График развития подъема дна котлована, как известно, имеет вид затухающей во времени кривой (Ф.Г. Габдрахманов, 1981).

Численное решение задачи об откопке котлована выполнено с целью оценки возможности использования моделей упрочняющейся и идеально упругопластической среды для прогноза деформаций основания в процессе возведения фундаментов мелкого заложения. Характеристики грунта в расчетах принят аналогичными характеристикам, использовавшимся в предыдущем разделе. Пусть мощность несущего слоя грунта равна 10 м, глубина котлована и, соответственно, глубина заложения фундамента равны 3 м, ширина котлована – 10 м, угол заложения откоса 3:5.

Расчетная схема задачи приведена на рис. 1.26. Задача решалась в четыре этапа. На первом этапе воспроизвело природное напряженное состояние грунта приложением узловых сил от собственного веса грунта. На втором этапе моделировалась откопка котлована удалением из расчетной схемы конечных элементов, составляющих объем котлована. На третьем этапе моделировалось устройство фундамента и

обратная засыпка котлована введением в расчетную схему элементов фундамента с шириной подошвы 1 м и удельным весом 23 кН/м³ и элементов грунта обратной засыпки с удельным весом, равным удельному весу окружающего грунта. На четвертом этапе к фундаменту прикладывалась вертикальная нагрузка, равная 200 кН/п.м.

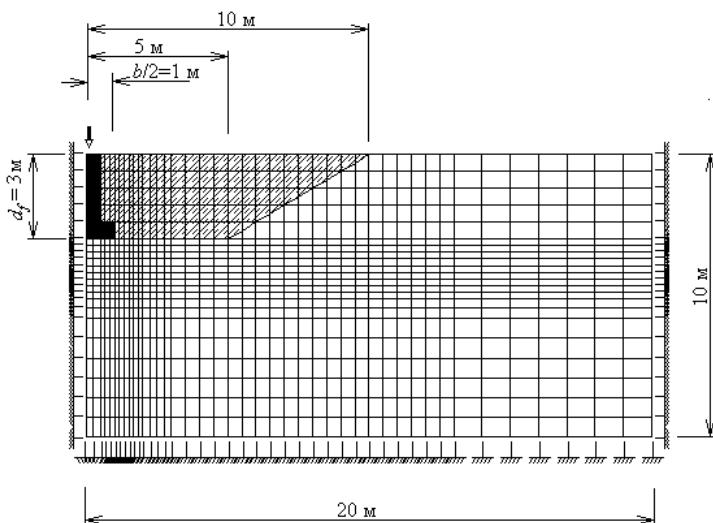


Рис. 1.26. Расчетная схема к задаче об откопке котлована.

В результате снятия бытового давления происходит поднятие дна котлована, зависящее от упругих характеристик грунта. Величина подъема дна в центральной части котлована при разгрузочном модуле $E = 5$ МПа, использовавшемся в расчетах с упрочняющейся моделью грунта, составила 5,7 см, а при модуле общей деформации, использующимся в идеально упругопластических моделях грунта, $E = 1,13$ МПа, величина подъема равна 32 см. Наблюдения же Ф.Г. Габдрахманова (1981) показывают, что подъем дна котлована определяется разгрузочным, а не нагружочным модулем деформации.

Разгрузка основания вызывает изменение напряженно-деформированного состояния и в окружающем котловане массиве грунта и приводит также к подъему грунта (рис. 1.27). На границе расчетной схемы на расстоянии 20 м от плоскости симметрии котлована поднятие грунта на глубине, равной глубине котлована, составило 7 мм для упрочняющейся среды и 4 см для идеально упругопластической среды. Следовательно, использование модели упрочняющейся среды позволяет локализовать расчетную зону влияния откопки котлована на окружающий массив грунта.

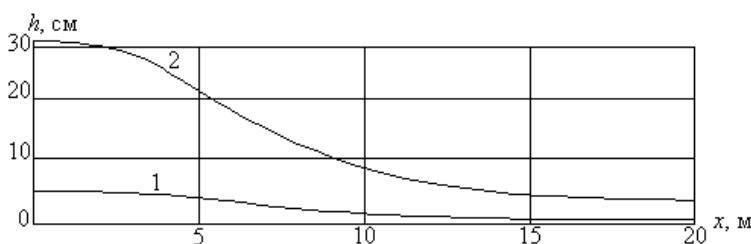


Рис. 1.27. Эпюры вертикальных перемещений грунта на отметке дна котлована при откопке котлована на проектную глубину с использованием моделей: 1 – упрочняющейся среды; 2 – идеально упругопластической среды.

При устройстве фундамента и обратной засыпке пазух основание получает осадку, складывающуюся из осадки, вызванной восстановлением природного давления, и осадки, определяемой разницей удельного веса материала фундамента и грунта. Расчетная осадка упрочняющегося основания составила 6,5 см, а идеально упругопластического – 36 см. Величина этой осадки должна включаться в суммарную расчетную осадку фундаментов, поскольку она возникает в процессе строительства объекта.

Нагружение фундамента дополнительной нагрузкой $N = 100$ кН приводит к осадке фундамента, величина которой составила 12,5 см для упрочняющейся модели и 17,5 см для идеально упругопластической, т.е. дополнительная осадки, вычисленные по двум вариантам моделей, достаточно хорошо (с разницей до 30%) коррелируют друг с другом.

Разница между этими осадками связана с тем, что касательные деформационные характеристики упрочняющейся модели снижаются по мере увеличения давления, в то время как упругие характеристики идеально упругопластической модели определялись как секущие значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Абелев М.Ю.** Строительство промышленных и гражданских зданий на слабых водонасыщенных грунтах. – М.: Стройиздат, 1983. – 248 с.
2. **Бате К., Вилсон Е.** Численные методы анализа и метод конечных элементов. М., Стройиздат, 1982 – 477с.
3. **Бугров А.К.** О решении смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунтов //Основания, фундаменты и механика грунтов, №6, 1974. – с. 20–23.
4. **Бугров А.К.** Метод конечных элементов в расчетах консолидации водонасыщенных грунтов. //Гидротехническое строительство. 1975. №7. – с. 35–38.
5. **Бугров А.К., Нарбут Р.М., Сипидин В.П.** Исследование грунтов в условиях трехосного сжатия. Изд-е 2-е, перераб. и доп. – Л.: Стройиздат. Ленингр. отд-е, 1987. – 184 с.
6. **Вялов С.С.** Реологические основы механики грунтов: Учеб. пособие для строительных вузов. – М.: Высш. школа, 1978. – 447 с.
7. **Габдрахманов Ф.Г.** Исследование напряженно-деформированного состояния грунтов при откопке котлованов. Автореф. дисс...канд. техн. наук. – Л., 1981.
8. **Голли А.В.** Исследование сжимаемой толщи в связных грунтах под центрально загруженными штампами. – Автореф. дисс...канд. техн. наук. – Л., 1972.
9. **Голли А.В., Лисюк М.Б., Парамонов В.Н., Шашкин А.Г.** Устройство для определения модуля деформации с учетом природного напряженного состояния глинистых грунтов/ Инженерная подготовка территорий для строительства промышленных и гражданских зданий на слабых грунтах. Л., ЛДНТП, 1985. – с. 62–65.
10. **Далматов Б.И., Голли А.В., Лисюк М.Б.** Об учете природного напряженного состояния при определении осадок фундаментов //Использование слабых грунтов в качестве оснований зданий и сооружений: Материалы семинара /ЛДНТП. Л., 1984. – с. 15–20.
11. **Далматов Б.И., Сотников С.Н., Дорошкевич Н.М., Знаменский В.В.** Исследование деформации грунтов в основании сооружений// Тр. VIII Междунар. конгр. по механике грунтов и фундаментостроению. – М.: Стройиздат, 1973. – с. 64–72.
12. **Далматов Б.И., Чикишев В.М.** Определение осадок фундаментов с учетом изменения модуля деформации глинистого грунта в зависимости от напряженного состояния //Основания, фундаменты и механика грунтов. 1984. №1. – с. 24–26.

13. **Дидух Б.И.** Упругопластическое деформирование грунтов: Монография. – М.: Изд-во УДН, 1987. – 166 с.
14. **Зарецкий Ю.К.** Вязкопластичность грунтов и расчеты сооружений. М.: Стройиздат, 1988 – 352 с.
15. **Зарецкий Ю.К.** Лекции по современной механике грунтов. Ростов-на-Дону. Изд-во Ростовского ун-та. 1989. – 607 с.
16. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 544 с.
17. **Клейн Г.К.** Учет неоднородности, разрывности деформаций и других механических свойств грунта при расчете сооружений на сплошном основании //Сб. тр. МИСИ им. Куйбышева. – М., 1956. №14. с. 168–180
18. **Коновалов П.А.** Распределительные свойства грунтов основания //Основания, фундаменты и подземные сооружения: Сб. тр. НИИОСП. – М.: Стройиздат. – 1970. №59. – с. 162–167.
19. **Коннор Дж., Бреббия К.** Метод конечных элементов в механике жидкости. Пер. с англ. – Л.: Судостроение, 1979. – 264 с.
20. **Коровкин В.С.** Длительная прочность и долговечность эксплуатируемых сооружений в краевых задачах портовой гидротехники. Автореф. дисс...д-ра техн. наук. М., МГАВТ. 1994.
21. **Макаров В.В.** О модуле деформации мелких песков //Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1969. №2. – с. 27-28.
22. **Меркулов И.И., Новичков П.И., Парамонов В.Н.** Основы проектного дела и автоматизация конструкторских работ в строительстве: Учеб. пособие. – Саранск: Изд-во Мордовского ун-та, 1994. – 36 с.
23. **Меркулов И.И., Парамонов В.Н.** Система численного исследования напряженно-деформированного состояния элементов строительных конструкций// Структурообразование, технология и свойства композиционных строительных материалов и конструкций. Тез. докл. науч.-техн. конф. Издание МГУ им. Н. П. Огарева. – Саранск, 1990. – с. 130-131.
24. **Оден Дж.** Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. - М.: Мир, 1976. – 708 с.
25. **Основания, фундаменты и подземные сооружения** /М. И. Горбунов-Посадов, В. А. Ильинцев, В. И. Крутов и др.; Под общ. ред. Е. А. Сорочана и Ю. Г. Трофименкова. – М.: Стройиздат, 1985. – 480 с. – (Справочник проектировщика).
26. **Рогатин Ю.А.** К исследованию механических свойств глинистого грунта на различной глубине //Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1976., №5. – с. 40-41.
27. **Сегерлинд Л.** Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
28. **СНиП 2.02.02-85.** Основания гидротехнических сооружений. – М., ЦИТИ Госстроя СССР, 1986. – 48 с.
29. **Сотников С.Н.** Строительство и реконструкция фундаментов зданий и сооружений на слабых грунтах. Автореф. дисс... д-ра техн. наук. – М.: МИСИ, 1987.
30. **Танака Т.** Анализ обобщенной упругопластической модели связных грунтов методом конечных элементов. Ноге добоку синкэндзе хококу.

1979. №18. С. 101–122. (Пер №844140. Всесоюзный центр переводов научно-технической литературы и документации).
31. **Ухов С.Б.** Расчет сооружений и оснований методом конечных элементов: Учеб. пособие. – М.: МИСИ, 1973. – 118 с.
32. **Фадеев А.Б.** Метод конечных элементов в геомеханике. Изд-во «Недра». М., 1987. – 224 с.
33. **Фадеев А.Б., Прегер А.Л.** Решение геотехнических задач методом конечных элементов. (Часть I) Томск: Изд-во Том. ун-та. 1994. – 194 с. (Часть II) – 136 с.
34. **Федоровский В.Г.** Учет геометрической нелинейности в конечноэлементных расчетах грунтовых массивов //Труды ин-та /НИИ оснований и подземных сооружений, 1986, вып.86. – с. 3–9.
35. **Федоровский В.Г., Александрович В.Ф.** Численное моделирование работы образца грунта при трехосном сжатии. //Численные методы решения задач механики грунтов и расчета фундаментов в сложных инженерно-геологических условиях. Труды ин-та/НИИ оснований и подземных сооружений, 1985, вып. 84. – с. 145–154.
36. **Цытович Н.А.** Механика грунтов (краткий курс). – М.: Высш. школа, 1968. – 259 с.
37. **Черников А.К.** Теоретические основы геомеханики: Учеб. пособие. – Спб: Петербургский гос. Ун-т путей сообщения, 1994. – 187 с.
38. **Чикишев В.М.** Исследование характера деформаций глинистых грунтов под фундаментами. Автореф. дисс... канд. техн. наук. – Л.: ЛИСИ, 1978.
39. **Шашкин А.Г.** Изменение напряженно-деформированного состояния слабых пылевато-глинистых грунтов оснований сооружений при квазистатическом нагружении. Автореф. дисс...канд. техн. наук, СПб, 1991.
40. **Шашкин А.Г., Парамонов В.Н., Белов Д.В.** Расчет свайных фундаментов с использованием модели структурно-неустойчивой грунтовой среды //Тр. IV Международной конференции по проблемам свайного фундаментостроения. Часть II, Пермь, 1994 – с.130–134.
41. **Швец В.Б.** Расчет осадки фундаментов с учетом структурной прочности грунта //Исследования работы оснований и фундаментов промышленных зданий и сооружений. Сб. тр. – Свердловск, 1969. – с. 30–41.
42. **Широков В.Н.** Определение структурной прочности в компрессионных испытаниях. // Инженерная геология. 1987. №6. – с. 111–114.
43. **Drucker D., Gibson E., Henkel J.** Soil Mechanics and Workhardening Theories of Plasticity //Transactions ASCE, 1957, Vol 122. – pp. 228–246.
44. **Jenike A.W., Shield R.T.** On the Plastic Flow of Coloumb Solids beyond Original Failure //Trans. ASCE. J. of Applied Mechanics, 1959. – pp. 599–602.
45. **Pietruszczak S., Mroz Z.** Numerical Analysis Accounting for Material Hardening and Softening// Int. J. Rock Mech. Min. Sci. And. Geomech. Abstr. 1980. Vol. 17. №4. pp. 199–207.
46. **Roscoe K.H., Burland J.B.** On the generalized Stress-Strain Behaviour of «Wet» Clay //Cambridge Univ. press. Heyman, Leskie, Eds. – 1968. pp. 535–609.
47. **Schultze E., Sievering W.** Statistical Evaluation of Settlement Observation //Proc. 9th ICSMFE. – Tokyo. – 1977, Vol 1. – pp. 711-714.

2

**ЧИСЛЕННОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ
ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ
КОНСОЛИДАЦИИ И ПОЛЗУЧЕСТИ
ГЛИНИСТЫХ ГРУНТОВ**

2.1. Методы описания процессов фильтрационной консолидации и ползучести грунтов

Практика строительства зданий и сооружений на глинистых грунтах и многочисленные лабораторные испытания показывают, что деформации грунтов развиваются в течение длительных промежутков времени. Основы расчета развития деформаций основания во времени впервые были предложены К. Терцаги, который объяснил запаздывание деформаций грунта наличием в порах несжимаемой воды, на которую в начальный момент передается нагрузка, и сопротивлением грунта движению воды сквозь поры. Эта теория была названа теорией фильтрационной консолидации. Карлом Терцаги представлено первое решение задачи об изменении порового давления и осадок грунта во времени для одномерного случая.

На основе теории К. Терцаги впервые попытку ввести систему уравнений плоской задачи предпринял Н.М. Герсеванов (1937, 1948). В эту систему входят уравнения равновесия скелета грунта:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \gamma_w \frac{\partial H}{\partial x} = 0; \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \gamma_w \frac{\partial H}{\partial z} = 0; \quad (2.2)$$

уравнение сплошности потока:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + \frac{\partial q_{qx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{qz}}{\partial z} = 0; \quad (2.3)$$

уравнение влажности:

$$\frac{de}{dt} = -(1+e)^2 \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right); \quad (2.4)$$

уравнение установившегося фильтрационного потока:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0; \quad (2.5)$$

принцип гидроемкости:

$$e_i + \frac{m_0}{1+\xi} (\sigma_{xi} + \sigma_{zi}) = e_0 + \frac{m_0}{1+\xi} (\sigma_{x0} + \sigma_{z0}); \quad (2.6)$$

обобщенная зависимость Дарси, учитывающая движение скелета грунта:

$$q_x - e \cdot q_{qx} = -k_\phi \frac{\partial H}{\partial x}; \quad (2.7)$$

$$q_z - e \cdot q_{qz} = -k_\phi \frac{\partial H}{\partial z}, \quad (2.8)$$

где q_x, q_z – скорость фильтрации воды в направлении осей x и z ;

q_{qx}, q_{qz} – скорость перемещения частиц в направлении осей x и z ;

e_0, σ_{x0} и σ_{z0} – коэффициент пористости и нормальные эффективные напряжения в начальный момент времени;

m_0 – коэффициент относительной сжимаемости;

ξ – коэффициент бокового давления.

В дальнейшем В.А. Флорин (1938, 1948, 1961) вместо уравнений (2.1-2.8) предложил выражение вида:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = -k_\phi \frac{(1+\xi)(1+e_{cp})}{m_0} \nabla^2 H;$$

и добавил уравнение неразрывности:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_z) = \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right).$$

Полученные выражения оказались слишком громоздкими для практического использования, поэтому В.А. Флорин вводит гипотезу о неизменности поля тотальных напряжений в процессе консолидации, т.е.:

$$\begin{cases} \sigma_x^* = \sigma_x^* - \gamma_0 H \\ \sigma_z^* = \sigma_z^* - \gamma_0 H, \\ \tau_{xz}^* = \tau_{xz}^* \end{cases}$$

где σ_x^* , σ_z^* , τ_{xz}^* – нормальные и касательные напряжения, соответствующие конечному стабилизированному состоянию процесса уплотнения, а $1 + \xi = 2$.

Позднее В. А. Флорин рассмотрел грунтовую среду, состоящую из трех фаз (скелет грунта, вода и газ).

Гипотеза В. А. Флорина о неизменности поля тотальных напряжений, т.е. принятие $v = 0,5$, как показывают З.Г. Тер-Мартиросян и др. (1983), при изменении v от 0,5 до 0,25 дает ошибку не более 20%.

Полную систему уравнений плоской задачи фильтрационной консолидации в 1935 году предложил М. Biot, в 1941 году он же предложил систему уравнений для трехмерного случая. Скелет грунта считался линейно-упругим пористым телом, подчиняющимся закону Гука. Поровая жидкость рассматривалась как сжимаемая, имеющая постоянный коэффициент объемной сжимаемости:

$$\begin{cases} G\nabla^2\bar{u} + \frac{G}{1-2v}\frac{\partial e}{\partial x} - \alpha\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ G\nabla^2\bar{v} + \frac{G}{1-2v}\frac{\partial e}{\partial y} - \alpha\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ G\nabla^2\bar{w} + \frac{G}{1-2v}\frac{\partial e}{\partial z} - \alpha\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ \nabla^2 u = \frac{\alpha}{m_v}\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{Q}\frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}, \quad (2.9)$$

где

$$e = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z},$$

G – модуль сдвига,

v – коэффициент Пуассона,

u – избыточное поровое давление,

\bar{u} , \bar{v} , \bar{w} – соответственно, перемещения по координатам x , y и z ,

α , Q – физические постоянные, введенные для неполноты водонасыщенного грунта.

В работах М. Biot (1941, 1956) даются аналитические решения ряда конкретных задач.

R. Schiffman (1969) инициировал международное обсуждение применимости существующих теорий фильтрационной консолидации для

решения практических задач. Результатом обсуждения явилась демонстрация эффективности связанной задачи теории фильтрационной консолидации и линейной теории упругости.

В развитии связанной задачи теории фильтрационной консолидации можно выделить два этапа. Первый этап (1950-1960 гг.) – разработка разрешающих уравнений и введение в них линейных и нелинейных зависимостей. Сюда же относится получение аналитических решений в замкнутом виде. Второй этап связан как с совершенствованием аналитического аппарата, так и с развитием численных методов.

Важное значение для дальнейшего развития теории фильтрационной консолидации имела работа Д.Е. Польшина (1948), который рассматривал грунтовую массу в виде двух совмещенных взаимодействующих сред и, используя теоремы механики сплошной среды и Эйлеровы переменные, сформулировал систему уравнений, аналогичную системе (2.9).

Ю.К. Зарецким (1967) разработана обобщенная модель Био-Флорина с учетом одновременного протекания ползучести скелета грунта, сжимаемости поровой жидкости, переменности поля суммарных напряжений и внутриобъемного набухания грунта.

Поскольку получение аналитических решений в замкнутом виде для многих случаев обобщенной модели весьма затруднительно, а и иногда невозможно, параллельно разрабатывалась фильтрационная теория консолидации Терцаги-Герсеванова. Эта теория получила дальнейшее развитие в трудах Н.М. Веригина (1961, 1965), А.Л. Гольдина (1974), Л.В. Горелика (1975), В.А. Флорина (1961), Н.А. Цытовича (1963) и др. За рубежом фильтрационная теория консолидации развивалась в трудах R. Barron (1948), R.E. Gibson and G. Namee (1963), L. Rendulic (1946) и др.

Начало второму этапу открыла работа R. Sandhu and E. Wilson (1968), в которой авторы рассмотрели применение метода конечных элементов для решения системы уравнений связанной задачи. Вслед за этой работой появились публикации по решению широкого круга практических задач (А.К. Бугров, 1975; Л.В. Горелик, 1975; Ю.К. Зарецкий, 1983; Д.И. Олимпиев и др., 1979; I.K. Booker and I.S. Small, 1975; C.S. Chang and I.M. Duncan, 1983; C.T. Hwang and others, 1971 и др.).

I.K. Booker (1975) исследовал влияние коэффициента интерполяции и шага времени Δt на устойчивость численного решения.

Ю.П. Ляпичев (1982) рассмотрел решение связанной задачи теории фильтрационной консолидации и напряженно-деформированного состояния каменно-земляной плотины на основе линейного и нелинейного законов деформирования с помощью МКЭ.

А.В. Мельников (1986) реализовал МКЭ связанную задачу фильтрационной консолидации с учетом уплотнения тела плотины под собственным весом и внешней нагрузкой. Для описания перемещений и поровых давлений приняты треугольные элементы первого порядка.

Что касается статической теории консолидации, то в предположении упругой работы скелета грунта к настоящему времени выпущено огромное число публикаций. Ю.К. Зарецкий (1983) отмечает, что рассматриваемая проблема расчета напряженно-деформированного состояния слабых водонасыщенных грунтов предусматривает учет пластических деформаций, зависимость проницаемости от изменения коэффициента пористости и других нелинейных эффектов. Поэтому использование в расчетах упругих законов деформирования даже приближенно не может отразить действительную картину напряженно-деформированного состояния. В последние десятилетия заметным шагом явилось использование нелинейных законов деформирования при прогнозе консолидации водонасыщенных грунтовых оснований. К этим работам можно отнести работы Ю.К. Зарецкого (1970, 1972), C.S. Chang and I.M. Duncan (1983), А.К. Бугрова и А.И. Голубева (1988), в которых в той или иной мере учитываются эффекты пластического деформирования скелета грунта, неполная водонасыщенность и зависимость проницаемости грунта от величины уплотнения. При решении задач использовался метод конечных элементов.

C.S. Chang and I.M. Duncan (1983) для описания работы скелета грунта использовали модель Cam-Clay, которая при минимальном количестве параметров, получаемых из стабилометрических испытаний, позволяет описать работу грунта как в упругой, так и в пластической стадии деформирования. Разработанная модель реализована методом конечных элементов.

В качестве основных направлений в развитии теории фильтрационной консолидации на современном этапе можно выделить следующие:

- учет законов нелинейной фильтрации воды в грунтах: снижение водопроницаемости по мере уплотнения грунта и учет начального градиента напора;

- учет газообразной фазы в грунте. При этом воздух либо представляется растворенным в поровой воде, что позволяет рассматривать грунт как двухфазный, поры которого заполнены сжимаемой жидкостью, либо представляется отдельной фазой, для которой вводятся дополнительные уравнения движения и сжимаемости;

- наиболее полный учет закономерностей деформирования скелета грунта при сложном нагружении.

Анализ научно-технической литературы свидетельствует о том, что в теории фильтрационной консолидации явление начального градиента

напора не получило своего описания с позиций математического аппарата механики грунтов (Н.А. Цытович, З.Г. Тер-Мартиросян, 1981). Для условий одномерной консолидации В.А. Флорин (1961) предлагает исключать начальный градиент напора из определяющих соотношений и учитывать его в граничных условиях задачи. В этом случае заранее известна конечная эпюра распределения порового давления по глубине слоя и, соответственно, конечная величина деформаций слоя. Однако такой подход неприменим для пространственных условий работы грунта, при сложной геометрии расчетной схемы поскольку направления фильтрации имеют неодномерное направление и невозможно заранее определить поле конечных поровых давлений.

Многие исследования показывают, что ряд явлений, проявляющихся в процессе деформирования грунта во времени, не всегда описываются классическими уравнениями теории фильтрационной консолидации, причем отличия тем выше, чем больше содержание глинистых частиц в грунте и чем ниже показатель текучести. К таким явлениям можно отнести следующие: не мгновенное достижение максимального значения порового давления, а его рост с некоторого начального значения до максимального, продолжение деформаций грунта после полного рассеяния порового давления (В.А. Флорин, 1961, Ю.К. Зарецкий, 1967, Н.А. Цытович, З.Г. Тер-Мартиросян, 1981 и др.). Проявление таких эффектов объяснялось проявлением вязких свойств скелета грунта. Ю.К. Зарецкий (1988) отмечает, что «...совместный учет реологических свойств грунтов и их консолидации с отжатием воды из пор отражает наиболее реальную картину деформирования грунтового массива».

Простейший прием, с помощью которого можно приближенно оценить влияние фильтрационных и вязких свойств глинистого грунта на процесс деформирования в зависимости от содержания глинистых частиц и консистенции грунта, предложен Н.Н. Масловым (1982). Он экспериментально показал, что соотношение времени T полной консолидации двух слоев грунта разной мощности h может быть определено из соотношения:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^n,$$

где n – показатель степени, величина которого находится в пределах от нуля до двух. При $n=0$ грунт обладает только вязким сопротивлением деформированию, при $n=2$ – только фильтрационным, при промежуточных значениях происходит одновременное протекание процессов фильтрационной консолидации и ползучести грунта.

Учет одновременного протекания консолидационных и реологиче-

ских процессов для решения практических задач связан с большими математическими трудностями, поэтому в инженерных методах расчета предлагается ползучесть рассматривать как вторичное явление, протекающее после окончания процессов фильтрационной консолидации. Для компрессионных условий деформирования грунта кривая фильтрационной консолидации, построенная в полулогарифмической системе координат $S\text{-lg}T$, имеет характер затухающей кривой. Однако многочисленные лабораторные испытания показывают, что по окончании процесса фильтрационной консолидации, оцениваемого по перегибу кривой развития осадок в осях $S\text{-lg}T$, деформационные процессы продолжаются, а развитие вторичных осадок практически пропорционально логарифму времени. Для оценки развития во времени осадок слоя грунта в компрессионных условиях после окончания первичной консолидации Бьюсман предложил логарифмическую функцию вида (С.С. Вялов, 1978):

$$S = ph \left(\alpha' + \alpha'' \lg \frac{t}{t'} \right),$$

где α' – единичная осадка слоя грунта, обусловленная фильтрационной консолидацией при единичном давлении p и единичной высоте h , α'' – единичная осадка, возникающая в результате развития ползучести, t' – время окончания первичной консолидации. Эта формула отражает неограниченное нарастание осадки во времени, в силу чего вторичные осадки получили название «вековой ползучести».

Разделение консолидации на первичную и вторичную удобно для обработки опытов, однако не вполне отвечает природе процесса. Решение задач с учетом одновременных протекания процессов фильтрационной консолидации и ползучести скелета грунта рассматривались в работах школ В.А. Флорина (1961), Ю.К. Зарецкого (1967), Н.А. Цытovichа и З.Г. Тер-Мартirosяна (1981), В.Н. Бронина (1980) и других исследователей. Для описания уравнения состояния скелета грунта использовались соотношения наследственной теории ползучести с различными ядрами и соотношения теории старения. В этих работах приводятся системы определяющих уравнений для решения задач фильтрационной консолидации и ползучести грунта, а также аналитические решения для простейших условий одномерной консолидации однородного слоя.

Для сложных условий нагружения решение задач с учетом одновременного протекания фильтрационной консолидации и ползучести скелета грунта и других нелинейных эффектов возможно только численными методами. Для решения нестационарных задач геотехники нами предложены подходы к численной реализации фильтрационной

консолидации с учетом таких факторов, как начальный градиент напора, ползучесть скелета грунта, выполнена оценка влияния этих факторов на расчет консолидационных процессов в основании, а также оценка роли реологических процессов в консолидации водонасыщенных грунтов, возможности применения разработанных решений для натурных условий нагружения основания.

2.2. Вывод определяющих уравнений МКЭ теории фильтрационной консолидации для условий плоской деформации

В соответствии с принципом Терцаги, в водонасыщенных грунтах тотальные напряжения σ_{ij} равны сумме напряжений в скелете грунта σ_{ij}^{ck} и в поровой воде p_w :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{ck} + \delta_{ij} p_w, \quad (2.10)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Уравнение равновесия записывается в виде:

$$\sigma_{ij,j}^{ck} + \delta_{ij} p_{w,j} = F_{\gamma i}, \quad (2.11)$$

где $F_{\gamma i}$ – объемные силы, определяемые собственным весом грунта.

Вторая группа уравнений определяется условием неразрывности потока:

$$k_{ij} (p_{w,j} + \rho_w F_j) + u_{i,i} = 0, \quad (2.12)$$

где k_{ij} – составляющие тензора водопроницаемости грунта,

ρ_w – плотность поровой воды,

u_i – перемещения точек в массиве грунта.

С учетом сжимаемости поровой воды выражение (2.12) записывается в виде:

$$(k_{ij} / \gamma_w (p_{w,j} + \rho_w F_j)) = u_{i,i} + (n/K) \cdot p_w, \quad (2.13)$$

где n – пористость грунта;

K – модуль объемной сжимаемости поровой воды.

Рассмотрим построение системы конечно-элементных уравнений задачи фильтрационной консолидации для условий плоской деформации.

Конечный элемент n определяется узловыми точками i, j, k и прямолинейными границами. Перемещения каждого узла представляются в виде компонент по направлениям соответствующих осей (рис. 2.1):

$$\{\delta_i\} \{u_i \ v_i\}^T. \quad (2.14)$$

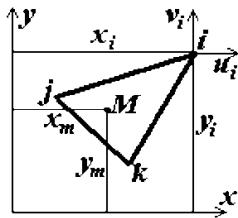


Рис. 2.1. Определение узловых перемещений конечного элемента.

Для n -го элемента вектор перемещений содержит 6 компонент:

$$\{\delta\}_n = \{\delta_i \ \delta_j \ \delta_k\}^T = \{u_i \ v_i \ u_j \ v_j \ u_k \ v_k\}^T. \quad (2.15)$$

Перемещения любой точки внутри элемента должны однозначно определяться этими шестью величинами. В простейшем случае перемещения u_m, v_m внутри элемента аппроксимируются линейными полиномами

$$u_m = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \quad (2.16)$$

$$v_m = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y.$$

Значения шести констант α_1 – α_6 получим из двух систем линейных уравнений, подставив вместо x и y координаты соответствующих узлов

$$\begin{cases} u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ u_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \end{cases}. \quad (2.17)$$

Выразив коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ через узловые перемещения, окончательно получим

$$u_m = 1/(2\Delta) \cdot ((a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_k + b_k x + c_k y)u_k), \quad (2.18)$$

где $a_i = x_j y_k - x_k y_j$, $b_i = y_j - y_k$, $c_i = x_k - x_j$.

Остальные коэффициенты получаются циклической перестановкой индексов i, j, k .

Введя обозначение $N_i = 1/(2\Delta) \cdot (a_i + b_i x + c_i y)$, называемое функцией формы элемента, и т.д., получим выражение для перемещений любой точки внутри элемента в направлении оси x через узловые пере-

мешения:

$$u_m = N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k . \quad (2.19)$$

Аналогично можно получить выражение для перемещений v_m точек элемента в направлении оси y :

$$v_m = N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k . \quad (2.20)$$

Величина 2Δ равна определителю:

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}, \quad (2.21)$$

т.е. удвоенной площади треугольного элемента.

В стандартной матричной форме выражения для перемещений внутри элемента можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \{\delta_m\} &= \begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \end{Bmatrix} = [N]\{\delta_k\} = \\ &= \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \{u_i \quad u_j \quad u_k \quad v_i \quad v_j \quad v_k\}^T . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Деформация в любой точке элемента в условиях плоской деформации охарактеризуется тремя составляющими:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.23)$$

Тогда горизонтальная деформация определяется через перемещения узлов элемента в соответствии с выражением:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial(N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k)}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} u_k . \quad (2.24)$$

Аналогично получим выражения для вертикальных деформаций и деформаций сдвига:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} v_k , \quad (2.25)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} v_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} v_k + \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} u_k , \quad (2.26)$$

или в матричной форме:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^T = [B]\{\delta\}, \quad (2.27)$$

где

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \end{bmatrix} - \text{матрица производных}$$

функций формы.

Деформации грунтовой среды определяются напряжениями в скелете грунта и в рамках линейной стадии работы грунта связаны с ними законом Гука. Для условий плоской деформации эти зависимости записываются в виде:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} [\varepsilon_x(1-\nu) + \varepsilon_y \nu];$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} [\varepsilon_y(1-\nu) + \varepsilon_x \nu];$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy},$$

или в матричной форме:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\},$$

где $\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^T$,

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} - \text{матрица упругих свойств.}$$

Выражение (2.10) может быть представлено в матричной форме в виде:

$$\{\sigma\} = \{\sigma^{ck}\} + \{g\}p, \quad (2.28)$$

где $\{\sigma^{ck}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^{ck} & \sigma_y^{ck} & \tau_{xy}^{ck} \end{Bmatrix}^T$, $\{g\} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}^T$.

Аппроксимируем поровые давления внутри элементов так же, как и

перемещения, линейными полиномами:

$$p_m = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y.$$

Тогда поровое давление в любой точке конечного элемента определяется через узловые значения порового давления следующим образом:

$$\{p\}_m = [N]\{p\}_n = [N_i \ N_j \ N_k] \{p_i \ p_j \ p_k\}^T,$$

а выражение (2.28) для тотальных напряжений в матричной форме будет иметь вид:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\} + \{g\}[N]\{p\}. \quad (2.29)$$

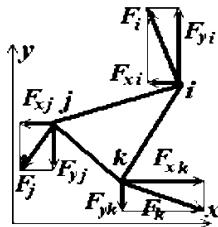


Рис. 2.2. Силовое взаимодействие конечного элемента с окружающими элементами.

В методе конечных элементов предполагается, что силовые взаимодействия между элементами осуществляются только через узловые точки. Деформирование элемента обусловлено действием окружающих элементов и внешних узловых сил F_i , F_j , F_k , каждая из которых для условий плоской деформации раскладывается на две составляющие вдоль координатных осей (рис. 2.2). Для построения системы конечно-элементных уравнений используется ряд методов: метод взвешенных невязок, минимизации энергетического функционала и т. п.

Для вывода связи шести компонент узловых перемещений и узловых сил воспользуемся условием равенства мощностей контурных сил на скоростях перемещений и внутренних напряжений на скоростях деформаций.

Мощность контурных сил F на скоростях перемещений v равна скалярному произведению:

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (2.30)$$

а мощность внутренних напряжений на скоростях деформаций:

$$N = \int_{\hat{V}} \sigma : D dV, \quad (2.31)$$

где D – тензор скорости деформаций, а символом $(:)$ обозначен оператор свертки по индексам.

Приравнивая правые части выражений (2.30) и (2.31), получим:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \int_{\hat{V}} \sigma : D dV. \quad (2.32)$$

Представим основные соотношения в матричной форме. В выражении (2.33) время t может быть исключено, тогда под вектором \vec{v} может подразумеваться вектор бесконечно малых приращений перемещений, а под тензором D – тензор бесконечно малых приращений деформаций. В этом случае метод получения определяющих соотношений МКЭ может быть отождествлен с методом виртуальных перемещений.

Тогда соотношение (2.32) можно записать в матричной форме в виде:

$$\{v\}^T \{F\} = \int_{\hat{V}} \{v\}^T [B]^T \{\sigma\} dV. \quad (2.33)$$

При линейной интерполяции функции перемещений в выражении (2.33) интегрирование по объему (площади) можно заменить умножением на объем. Тогда сократив левую и правую части выражения на $\{v\}^T$, получим выражение, имеющее смысл уравнения равновесия:

$$\{F\} = [B]^T \{\sigma\} \Delta. \quad (2.34)$$

Подставив вместо вектора $\{\sigma\}$ выражение (2.29) получим систему уравнений равновесия для многофазной среды:

$$\{F\} = [K] \{\delta\} + [C] \{p\}, \quad (2.35)$$

где

$$[K] = [B]^T [D] [B] \Delta;$$

$$[C] = [B]^T \{g\} [N] \Delta.$$

Поскольку в матрицу $[C]$ входит подматрица $[N]$, зависящая от координаты точки, необходимо интегрирование по площади элемента. Однако несложно убедиться, что при любом числе точек численного интегрирования результат получится идентичным, поэтому в выражении для $[C]$ достаточно определить функции формы для центра элемента. Очевидно, что они будут равны $\frac{1}{3}$, и тогда

$$[C] = [B]^T \{1 \ 0 \ 0\}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Delta.$$

В системе уравнений (2.35) остаются неизвестными значения поровых давлений.

Для составления полной системы уравнений в теории консолидации вводится условие неразрывности, согласно которому отток жидкости из дифференциально малого элемента (изменение объема жидкости за время dt) равен изменению объема элемента.

В механике грунтов принято считать, что фильтрация воды в грунте происходит с небольшими скоростями и подчиняется закону Дарси:

$$v = k_\phi I,$$

где k_ϕ – коэффициент фильтрации;

I – градиент напора.

$$I = \frac{dH}{dl} = \frac{1}{\gamma_w} \cdot \frac{dp}{dl},$$

Тогда осевые компоненты скоростей фильтрации равны:

$$v_x = \frac{k_x}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial p}{\partial x};$$

$$v_y = \frac{k_y}{\gamma_w} \cdot \frac{\partial p}{\partial y},$$

или в матричной форме:

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{\gamma_w} \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{Bmatrix}.$$

При аппроксимации поверхности поровых давлений треугольными элементами первого порядка производные по осям равны сумме произведений функций формы по осям на значения узловых поровых давлений:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} p_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} p_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} p_k;$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial y} p_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} p_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} p_k,$$

или в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{Bmatrix} = [B]\{p\}.$$

Тогда

$$\{v\} = \frac{1}{\gamma_w} [K_\phi] [B]\{p\},$$

где $[K_\phi] = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}$ – матрица фильтрационной анизотропии.

Зададим напору в i узле $H_i = p_i / \gamma_w$ возможное изменение $dH_i = dp_i / \gamma_w$. Тогда вектор вариаций напоров будет равен:

$$\{dH\} = \begin{Bmatrix} dp \\ \gamma_w \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^T.$$

Дополнительная работа потока на контуре равна сумме произведений узловых расходов на вариации напоров:

$$A_k = \{Q\}^T \{dH\},$$

а вариации градиентов равны:

$$\{dI\} = [B]\{dH\}.$$

Дополнительная работа потока в пределах элемента равна интегралу по площади от произведения скоростей на вариации напоров:

$$\begin{aligned} A_{bh} &= \int_S (v_x dI_x + v_y dI_y) dS = \int_S \{dI\}^T \{v\} dS = \int_S \{dH\}^T [B]^T [K_\phi] [B]\{H\} dS = \\ &= \int_S dH \{1 \ 0 \ 0\}^T [B]^T [K_\phi] [B]\{H\} dS \end{aligned}$$

Приравнивая $A_k = A_{bh}$, получим:

$$Q_i = \int_S \{1 \ 0 \ 0\}^T [B]^T [K_\phi] [B]\{H\} dS.$$

Давая последовательно вариации напоров dH в узлах j и k , получим аналогичные выражения для узловых расходов Q_j и Q_k . В результате имеем выражение для вектора узловых расходов:

$$\{Q\} = \frac{1}{\gamma_w} \int_S [B]^T [K_\phi] [B] \{p\} dS.$$

Введем обозначение:

$$[K_f] = \frac{1}{\gamma_w} \int_S [B]^T [K_\phi] [B] dS.$$

Поскольку в подынтегральное выражение входят постоянные, заменим интегрирование по площади треугольника умножением на площадь:

$$[K_f] = \frac{1}{\gamma_w} \Delta [B]^T [K_\phi] [B],$$

тогда

$$\{Q\} = [K_f] \{p\}. \quad (2.36)$$

Относительная объемная деформация равна сумме осевых деформаций:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \{g\}^T \{\varepsilon\} = \{g\}^T [B]^T \{u\}.$$

Тогда скорость изменения объемной деформации равна:

$$\frac{d\varepsilon_v}{dt} = \{g\}^T [B]^T \frac{d\{u\}}{dt},$$

а изменение объема элемента за время dt :

$$\{Q\} = \frac{1}{dt} \int_S [N] \{g\}^T [B]^T d\{u\} dS$$

Обозначим:

$$[S] = \int_S [N] \{g\}^T [B]^T dS \approx [N] \{g\}^T [B]^T \Delta. \quad (2.37)$$

Тогда:

$$\{Q\} = \frac{1}{dt} [C]^T d\{u\}. \quad (2.38)$$

Формально из выражения (2.37) следует, что $[S]=[C]^T$.

Приравнивая правые части выражений (2.36) и (2.38), получим:

$$\frac{1}{dt} [C]^T d\{u\} = [K_f] \{p\},$$

или

$$\frac{1}{dt} [C]^T d\{u\} - [K_f] \{p\} = 0. \quad (2.39)$$

Заменив дифференциальное выражение (2.39) разностным аналогом первого порядка

$$[C]^T \{u(t_n)\} - [C]^T \{u(t_{n-1})\} - \frac{\Delta t}{2} [K_f] \{p(t_n)\} - \frac{\Delta t}{2} [K_f] \{p(t_{n-1})\} = 0,$$

и вынося в правую часть слагаемые с параметрами, определяемыми на предыдущий момент времени, окончательно получим уравнение неразрывности потоков в конечно-элементной формулировке

$$[C]^T \{u(t_n)\} - \frac{\Delta t}{2} [K_f] \{p(t_n)\} = [C]^T \{u(t_{n-1})\} + \frac{\Delta t}{2} [K_f] \{p(t_{n-1})\}. \quad (2.40)$$

Как известно, центрально-разностная схема решения дифференциальных уравнений является безусловно устойчивой, а точность решения определяется величиной принятого шага Δt .

Таким образом, полная система уравнений теории фильтрационной консолидации может быть записана в виде:

$$\begin{cases} [K] \{u(t_n)\} + [C] \{p(t_n)\} = \{F(t_n)\} \\ [C]^T \{u(t_n)\} - \frac{\Delta t}{2} [K_f] \{p(t_n)\} = [C]^T \{u(t_{n-1})\} + \frac{\Delta t}{2} [K_f] \{p(t_{n-1})\} \end{cases}. \quad (2.41)$$

Если в задаче учитывается сжимаемость поровой жидкости, то изменение объемной деформации определяется оттоком воды из элемента и объемной деформацией жидкости:

$$\frac{d\epsilon_v}{dt} = \{g\}^T [B]^T \frac{d}{dt} \{u\} - \frac{n}{K_w} [N] \frac{d}{dt} \{p\},$$

где n – пористость грунта,

K_w – коэффициент объемной сжимаемости поровой воды.

В результате уравнение неразрывности потоков (2.40) примет вид:

$$\begin{aligned} [C]^T \{u(t_n)\} - \left(\frac{\Delta t}{2} [K_f] - \frac{n}{K_w} [E] \right) \{p(t_n)\} = \\ = [C]^T \{u(t_{n-1})\} + \left(\frac{\Delta t}{2} [K_f] - \frac{n}{K_w} [E] \right) \{p(t_{n-1})\} \end{aligned}, \quad (2.42)$$

где матрица $[E]$ равна:

$$[E] = \frac{n}{K_w} [N]^T [N] \Delta.$$

В численной реализации запись уравнения неразрывности в форме (2.42) предпочтительнее, поскольку при мгновенном нагружении среды, поры которой заполнены несжимаемой жидкостью, объемные деформации равны нулю, и на диагонали матрицы жесткости системы появляются нули. Введение в систему уравнений высокого значения коэффициента сжимаемости поровой воды, внося незначительную погрешность в расчет, позволяет исключить деления на ноль при расчете двухфазных сред.

Поскольку в матрицу $[E]$ входит произведение подматриц $[N]$, следует выполнить численное интегрирование по элементу. Однако, как показывают численные расчеты, результаты для треугольных симплекс-элементов при любом количестве точек интегрирования (например, по Hammer P.C. et al, 1956), практически одинаковы, поэтому в практических расчетах достаточно одной точки интегрирования.

Для полного описания задачи необходимо назначить граничные и начальные условия. Очевидно, что система уравнений (2.41) является самостартующей, поскольку в момент времени $t=0$ приложения нагрузки начальные условия автоматически выполняются за счет того, что компоненты узловых перемещений и поровых давлений на предыдущий момент времени равны нулю.

В качестве граничных приняты следующие условия (рис. 2.3). На участке границы S_u заданы перемещения $\delta_r=\delta_0$. На проницаемом участке S_d поровые давления $p_r=0$, на непроницаемом участке S_n расходы по нормали к поверхности равны нулю, т.е. $dQ/dn=0$, или $dp_r/dn=0$. Последнее условие выполняется автоматически, если не задано условие предыдущего типа. И, наконец, на участке S_f заданы сосредоточенные и распределенные силы $F_r=F_0$. Из системы уравнений (2.41) автоматически вытекают начальные условия: при $t=0$ $\varepsilon_v=0$, или при учете сжимаемости жидкости $\varepsilon_v=n/K_w \cdot p_0$.

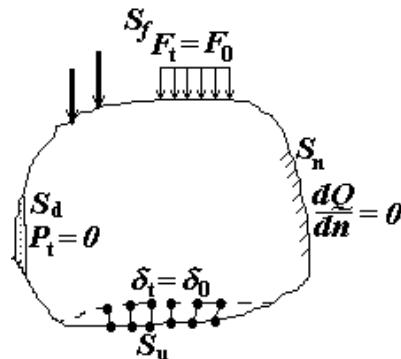


Рис. 2.3. Границные условия краевой задачи теории фильтрационной консолидации.

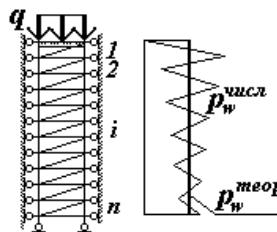


Рис. 2.4. Начальное распределение порового давления в одномерной задаче фильтрационной консолидации.

Рассмотрим особенности решения задачи фильтрационной консолидации при аппроксимации поверхности поровых давлений конечными элементами первого порядка на примере задачи одномерной консолидации (рис. 2.4). При приложении равномерного вертикального давления q во всей области поровое давление в начальный момент времени равно внешнему давлению $p_w=q$. При этом поровое давление в середине i -го слоя должно быть равно q . Поскольку на поверхности дренажа поровое давление равно нулю, то для того, чтобы среднее поровое давление в пределах первого слоя соответствовало внешнему давлению q , на границе первого и второго слоев поровое давление будет выше теоретического. Как показывают численные эксперименты, эта разница тем выше, чем мельче размеры элементов первого слоя. Далее, на границе второго и третьего слоев рассчитанные значения порового давления будут меньше теоретических значений $p_w < p_w^{meop}$, поскольку аналогично требуется обеспечить равенство $p_w=p_w^{meop}$ в середине второго слоя, и т.д. В результате численного расчета получится ломаная эпюра поровых давлений. В дальнейшем (для следующих расчетных моментов времени) ломаное распределение p_w сглаживается по

мере того, как теоретическая эпюра распределения поровых давлений в пределах первого слоя становится близкой к треугольнику (рис. 2.5).

Еще более сложная картина распределения порового давления в различные моменты времени получается для неодномерных условий консолидации. Поэтому, если сходимость численных решений с аналитическими расчетами по перемещениям весьма хорошая, то анализа поровых давлений выполнить невозможно. В научно-технической литературе, как правило, пользуются параболической аппроксимацией поровых давлений шестиузловыми треугольными элементами.

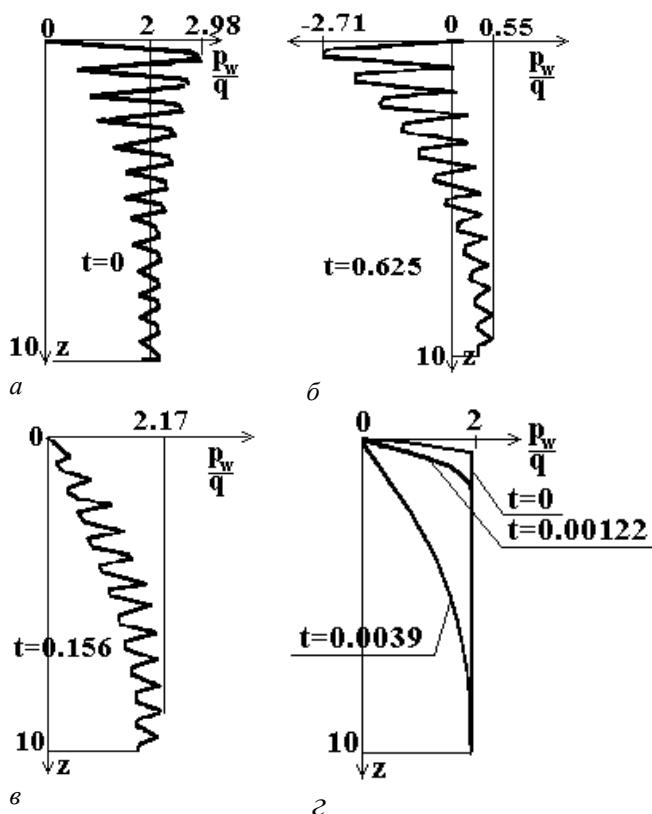


Рис. 2.5. Эпюры распределения порового давления по глубине в процессе одномерной консолидации на различные моменты времени (расчет МКЭ при аппроксимации поверхности поровых давлений треугольными элементами первого порядка):
 а, б, в – без сглаживания поровых давлений,
 г – со сглаживанием по предлагаемому методу.

Если в явном виде анализ поровых давлений не требуется, то данное решение можно принять в качестве окончательного. Гладкие поля поровых давлений необходимы, если в расчетах учитывается изменение свойств или реакции среды на механической воздействии в зависимости от величины порового давления, например, при учете начального градиента, ползучести грунта и т.п.

Простейшей процедурой сглаживания для условий одномерной консолидации может быть осреднение поровых давлений по слою (рис. 2.6):

$$p_w^{cp} = \frac{p_{w1} + p_{w2} + p_{w3} + p_{w4}}{4}.$$

При этом эпюра поровых давлений, построенная по значениям осредненных поровых давлений в центре слоев, получается весьма гладкой. Затем поровое давление p_w^{cp} можно распределить по узлам в соответствии с выражением:

$$p_{wi} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_w^{cp},$$

где p_{wi} – вычисленное после распределения поровое давление в i -м узле;

p_w^{cp} – поровое давление в примыкающем к узлу слое;

m – количество примыкающих к узлу слоев элементов.

Как показывают численные эксперименты, такая процедура эффективна только для условий одномерной консолидации. В пространственных условиях фильтрация в общем случае имеет не одномерное направление. Поэтому в общем случае можно предложить следующую процедуру сглаживания поровых давлений (рис. 2.7).

1. Из решения системы уравнений (2.41) определяются узловые значения поровых давлений.

2. Вычисляются средние значения поровых давлений в центрах элементов $p_{we}^{cp} = p_{wi}/3$, где p_{wi} – поровое давление в i -м узле элемента.

3. Вычисляются сглаженные значения поровых давлений в узлах сетки

$$p_{wi} = \left(\sum_{e=1}^m p_{we}^{cp} A_e \right) \Bigg/ \sum_{e=1}^m A_e$$

где A_e – площадь e -го элемента, примыкающего к узлу;

m – количество элементов, примыкающих к узлу.

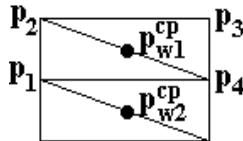


Рис. 2.6. Сглаживание полей поровых давлений по значениям порового давления в центре слоев.

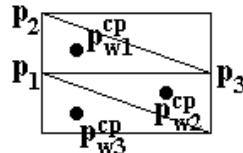


Рис. 2.7. Сглаживание полей поровых давлений по значениям порового давления в центре элементов.

Распределение поровых давлений по глубине слоя на различные моменты времени в задаче одномерной консолидации при использовании предлагаемого метода показано на рис. 2.5,г и практически совпадает с теоретической эпюйрой.

Сравнение численного метода расчета задач фильтрационной консолидации с аналитическим решением выполнено по результатам расчетов, представленных в статье Hwang C.T. et al (1971). Расчетная схема размерами $L=6b$ по горизонтали и $H=9b$ по вертикали (рис. 2.8) разбита на сеть конечных элементов с равномерным шагом по горизонтали и по вертикали $0,5b$. Верхняя поверхность – дренируемая. Сверху на полуширине $b=1$ приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q=1$. Модуль деформации грунта принят равным $E=2$, коэффициент Пуассона $\nu=0$, коэффициенты фильтрации $k_x=k_y=1$, удельный вес воды $\gamma_w=1$. Такие условные безразмерные параметры среды приняты для удобства сравнения с графиками Hwang C.T. et al., показанными в приведенных оссях для параметра консолидации $c=2Gk_f/\gamma_w=1$. Время отслеживания процесса консолидации $T=100$ разбито на 20 интервалов с коэффициентом нарастания интервала 2,72.

На рис. 2.9 приведены графики распределения приведенного значения порового давления p_w/q по приведенной глубине z/b в приведенный момент времени $t=ct/b=0,1$ согласно аналитическому расчету (сплошная линия) и численному расчету (точки). Сравнение результатов численного счета с теоретическими значениями по поровому давлению показывает удовлетворительную совпадение, а плавный характер эпюры и изолиний порового давления (на рисунках изолинии не показаны) подтверждает возможность применения предложенного метода сглаживания порового давления в расчетах. Завышенные значения порово-

го давления в нижней части схемы связаны с более грубым разбиением этой области на конечные элементы. Численные эксперименты показывают, что более дробная разбивка дает более близкие результаты численного расчета к теоретическому решению.

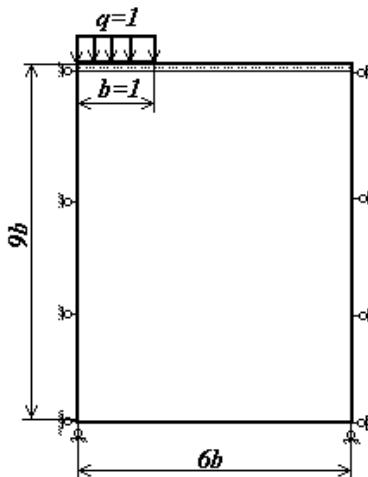


Рис. 2.8. Расчетная схема к тестовой задаче фильтрационной консолидации при нагружении основания полосовой абсолютно гибкой нагрузкой.

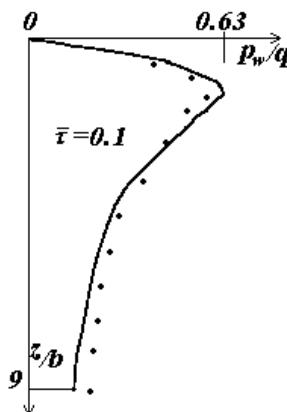


Рис. 2.9. Эпюра распределения порового давления по глубине в приведенный момент времени $\bar{\tau} = 0.1$ по результатам аналитического (сплошная линия) и численного (точки) решений.

На рис. 2.10 представлены графики зависимости приведенного порового давления p_w/q от приведенного времени $\tau=ct/b=2t$ для точек, располагающихся на глубине $z/b=0,5$ и на расстоянии $x/b=0$ и $x/b=1$ от оси приложения нагрузки. Результаты расчета очень хорошо совпадают.

ют с теоретическими графиками. Предложенная процедура сглаживания поровых давлений позволила выявить эффект Mandel-Cryer роста порового давления по сравнению с начальным значением под областью нагружения.

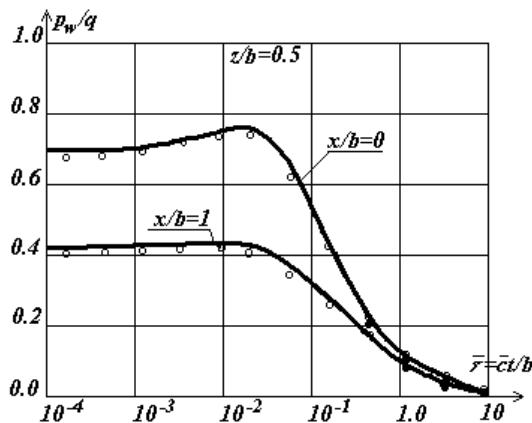


Рис. 2.10. Графики изменения порового давления во времени.

Сравнение численных и аналитических результатов расчета развития осадок во времени выполнены также для слоя ограниченной толщины (рис. 2.11). Расчетная схема имеет размеры $L=15$ по горизонтали и $H=1$ по вертикали. Полуширина площадки нагружения $b=1$, интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q=1$. Коэффициенты фильтрации $k_x=k_y=1$, удельный вес воды $\gamma_w=1$. Время наблюдения за процессом консолидации $T=100$, количество временных интервалов $n=20$, коэффициент нарастания интервала 2,72. Модуль сдвига грунта $G=1$. Задача выполнялась с различными коэффициентами Пуассона грунта $\nu=0$ ($E=2$), $\nu=0,2$ ($E=2,4$), $\nu=0,4$ ($E=2,8$). Численные и аналитические расчеты представлены в виде графиков развития приведенной осадки центральной точки поверхности нагружения и показывают хорошее совпадение (рис. 2.12).

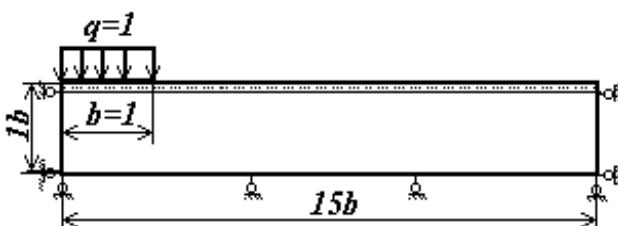


Рис. 2.11. Расчетная схема к задаче фильтрационной консолидации слоя ограниченной толщины под действием полосовой абсолютно гибкой нагрузки.

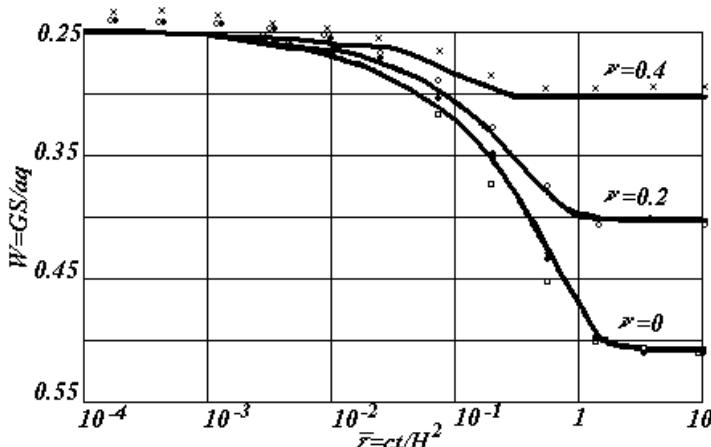


Рис. 2.12. Графики развития осадки центральной точки нагружения на дневной поверхности во времени при различных значениях коэффициента Пуассона: сплошная линия – аналитическое решение; \times – численное решение при $\nu=0,4$; \circ – то же, при $\nu=0,2$; \square – то же, при $\nu=0$; \bullet – то же, при $\nu=0$, $k_x/k_y=3/1$.

Кроме этого, рассмотрено решение задачи консолидации анизотропного по водопроницаемости основания при $k_x/k_y=3/1$, $\nu=0$, $E=2$ (рис. 2.12). Скорость нарастания осадок в этом случае выше изотропного варианта. Следует отметить, что в противопоставление Соболевскому Ю.И. (1986) картина распределения порового давления и деформаций основания в начальный момент времени одинакова как для изотропного, так и для анизотропного основания. Это связано с тем, что единственным начальным условием, автоматически вытекающим из определяющих соотношений задачи консолидации, является равенство нулю объемной деформации грунта (или равенство ее объемной деформации газосодержащей поровой жидкости).

2.3. Решение задачи фильтрационной консолидации с учетом начального градиента напора

Учет начального градиента напора переводит задачу фильтрационной консолидации в разряд физически нелинейных, в которых скорость фильтрации зависит от действующего градиента напора (рис. 2.13):

$$\{v\} = f\{I\}.$$

Следовательно, задача может быть решена, например, методом переменной матрицы жесткости с изменяемым в процессе решения ко-

эффективентом фильтрации в зависимости от действующего градиента напора:

при $I < I_0$ $v_\phi = 0$, $k_\phi = 0$;

при $I \geq I_0$ $v_\phi = k_\phi(I - I_0)$, или $v_\phi = k(i) \cdot I$.

Отсюда $k_\phi(I - I_0) = k(i) \cdot I$, или $k(i) = k_\phi(1 - I_0/I)$.

Порядок решения задачи фильтрационной консолидации с переменной МЖС можно представить следующим образом.

1) Выполняется решение системы уравнений консолидации для момента времени $t_0=0$.

2) Выполняется решение системы уравнений консолидации для $t_1=t_0+\Delta t$.

3) Определяются средние значения поровых давлений в узлах на интервале времени Δt .

4) Определяются градиенты напора в элементах I_x и I_y .

5) По градиентам напора вычисляются секущие коэффициенты фильтрации элементов $k(i)$ (рис. 2.13).

6) Если разница $k(i)$ на m -ом цикле итераций отличается от значения $k(i)$ предыдущего цикла итерации более чем на заданную точность, повторяется решение с пункта 2. В противном случае осуществляется переход к решению задачи для следующего интервала времени. Поскольку аналитических решений для задачи с начальным градиентом нет, анализ получаемых решений будем выполнять с точки зрения здравого смысла.

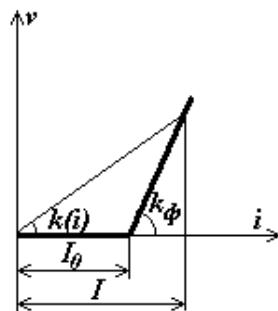


Рис. 2.13. Схема к определению «секущего» коэффициента фильтрации $k(i)$ при решении задачи фильтрационной консолидации методом переменной матрицы жесткости.

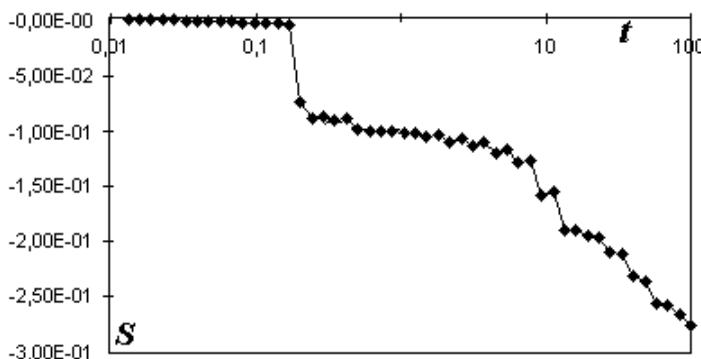


Рис. 2.14. Результаты расчета развития осадки поверхности грунта во времени при решении задачи фильтрационной консолидации с учетом начального градиента напора методом переменной матрицы жесткости.

Результаты решения задачи методом переменной матрицы жесткости можно продемонстрировать в виде графика развития осадки поверхности среды, обладающей начальным градиентом $I_0=0,2$, во времени, консолидирующемся в одномерных условиях. Расчетная схема приведена на рис. 2.4, результаты решения – на рис. 2.14.

Как показывает серия численных экспериментов, применение метода переменных параметров для данной задачи обладает рядом существенных недостатков. На каждом цикле итераций матрица жесткости формируется и обращается заново, поэтому метод переменной матрицы жесткости является неэффективным с точки зрения затрат машинного времени.

При превышении в элементе начального градиента изменяется и фиктивный коэффициент $k(i)$, величина и изменение которого на интервале Δt будет зависеть от шага Δt , а также от заданной точности. При больших интервалах Δt величина $k(i)$ при переходе элемента через I_0 резко изменяется. Если граничат два элемента, в одном из которых $I < I_0$, в другом $I \geq I_0$ на интервале Δt , то большая разница в $k(i)$ у этих элементов приводит к плохой обусловленности МЖС, что вызывает плохую сходимость итерационного процесса, каким бы методом мы его не выполняли. Иногда приходится ограничивать число итерационных циклов без достижения заданной точности. Эпюра осадок получается ступенчатой, т.е. переход слоев элементов через начальный градиент происходит дискретно.

Более эффективный алгоритм можно построить, если ввести начальный градиент непосредственно в уравнение неразрывности.

Градиенты напора по направлениям фиксированных осей равны:

$$I_x = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot H_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \cdot H_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} \cdot H_k,$$

$$I_y = \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot H_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} \cdot H_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} \cdot H_k,$$

или в матричной форме:

$$\{I\} = \begin{Bmatrix} I_x \\ I_y \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_k \end{Bmatrix} = [B]\{H\}.$$

Скорость фильтрации в зависимости от действующего градиента напора равна:

$$v = k_\phi (I - I_0) \text{ при } I > I_0;$$

$$v = 0 \quad \text{при } I \leq I_0.$$

Запишем эти условия в виде:

$$v = k_\phi I - k_\phi I_0 \text{ при } I > I_0;$$

$$v = k_\phi I - k_\phi I \text{ при } I \leq I_0,$$

или

$$v = k_\phi I - k_\phi I_\phi.$$

Тогда выражение для вектора скоростей фильтрации в среде, обладающей начальным градиентом напора, может быть записано в виде:

$$\{v\} = [K_\phi] \left([B]\{H\} - \begin{Bmatrix} I_\phi \\ I_\phi \end{Bmatrix} \right),$$

где $I_\phi = I_0$ при $I > I_0$, $I_\phi = I$ при $I \leq I_0$.

Опуская промежуточные преобразования, окончательно приведем выражение, определяющее условие неразрывности потоков для среды, обладающей начальным градиентом напора:

$$\begin{aligned} [C]^T \{u(t_n)\} - \frac{\Delta t}{2} [K_f] \{p(t_n)\} - \frac{\Delta t}{2} [B]^T [K_\phi] \{I_\phi(t_n)\} \Delta = \\ = [C]^T \{u(t_{n-1})\} + \frac{\Delta t}{2} [K_f] \{p(t_{n-1})\} + \frac{\Delta t}{2} [B]^T [K_\phi] \{I_\phi(t_{n-1})\} \Delta \end{aligned} . \quad (2.43)$$

Вектор $\{I_\phi(t_n)\}$ вынесем в правую часть, поскольку он является дополнительной неизвестной величиной и его необходимо будет подобрать итерационной процедурой. Тогда уравнение неразрывности потоков запишем в виде:

$$\begin{aligned} [C]^\top \{u(t_n)\} - \frac{\Delta t}{2} [K_f] \{p(t_n)\} = & [C]^\top \{u(t_{n-1})\} + \frac{\Delta t}{2} [K_f] \{p(t_{n-1})\} + \\ & + \frac{\Delta t}{2} [B]^\top [K_\phi] \{I_\phi(t_n)\} \Delta + \frac{\Delta t}{2} [B]^\top [K_\phi] \{I_\phi(t_{n-1})\} \Delta \end{aligned} . \quad (2.44)$$

Общую схему построения решения можно представить подобно известной процедуре «начальных напряжений».

1. Первый шаг решения для очередного момента времени t выполняется с вектором $\{I_\phi(t_n)\} = \{I_\phi(t_{n-1})\}$ (в момент времени $t=0$ – нулевой вектор).

2. По полученным значениям узловых поровых давлений вычисляются узловые напоры $H = \frac{p_w}{\gamma_w}$ и определяется вектор градиентов напора:

$$\{I_\phi(t_{n-1})\} = \Delta [B]^\top [K_f] \{I_0\} sign(\Delta).$$

3. К правой части уравнения неразрывности потоков добавляется невязка

$$-\Delta t/2 \{I_\phi(t_{n-1})\}$$

4. Выполняется повторное решение для нулевого момента времени с учетом невязки. Определяется вектор $\{p(t_n)\}$, по которому вычисляется вектор избыточных напоров $\{H(t_n)\} = (1/\gamma_w) \{p(t_n)\}$ и вектор градиентов $\{I(t_n)\}$.

5. Выполняется проверка.

Если $I < I_0$, то в правую часть добавляется вектор градиентов напора со знаком (-), равный:

$$\{I_\phi(t_n)\} = (\Delta t/2) \Delta [B]^\top [K_f] \{I\} sign(\Delta)$$

Если $I > I_0$, то добавляется вектор (со знаком (-)), равный:

$$\{I_\phi(t_n)\} = ((\Delta t/2) \Delta [B]^\top [K_f] \{I_0\} sign(I)) sign(\Delta)$$

6. Выполняется повторный расчет с п.4 до достижения заданной

точности. В качестве параметра, определяющего точность решения, может быть принята относительная разница поровых давлений, вычисленных на предыдущем и текущем циклах итераций.

7. По окончании итерационной процедуры производится запись массива $\{I_\phi(t_{n-1})\}$ в массив $\{I_\phi(t_n)\}$ и решение для следующего момента времени выполняется с имеющимся начальным приближением.

Рассмотрим результаты численных расчетов задачи одномерной консолидации при начальных градиентах $I_0=0; 0,1$ и $0,2$. Теоретические конечные эпюры распределения порового давления по глубине представлены на рис. 2.15. Эпюры порового давления для различных моментов времени приведены на рис. 2.16, графики развития осадки поверхности во времени – на рис. 2.17.

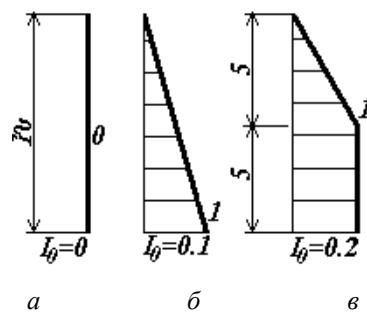


Рис. 2.15. Теоретические конечные эпюры распределения поровых давлений в задаче одномерной консолидации слоя 10-метровой толщины при различных начальных градиентах напора.

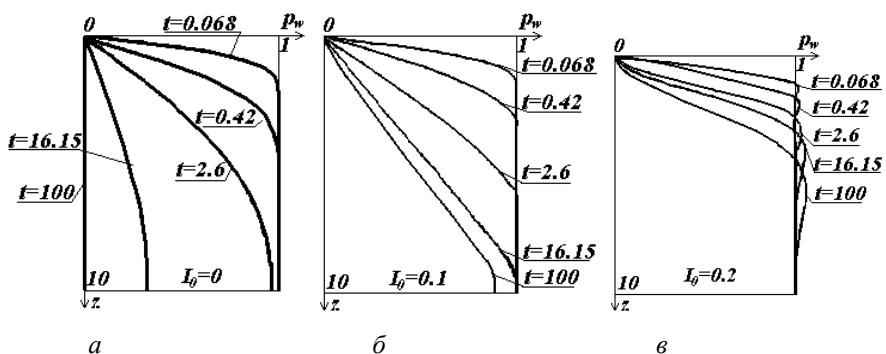


Рис. 2.16. Распределение порового давления по глубине на различные моменты времени для среды с начальным градиентом напора $a - I_0=0, \beta - I_0=0,1, \gamma - I_0=0,2$.

По результатам численного расчета для сред, обладающим ненулевым начальным градиентом напора, наблюдается замедление скорости консолидации, а осадка не достигает конечного значения ($S_{\infty}=2,857$). В рассматриваемом случае при $I_0=0,1$ теоретическое значение конечной осадки должно быть равно $2,857/2=1,428$, полученное по расчету 1,526. При $I_0=0,2$ теоретическое значение $S_{\infty}=2,857/4=0,714$, расчетом получено 0,618. Здесь за конечную осадку условно принято значение осадки на момент времени $T=100$, однако при ненулевом значении I_0 скорость отжатия воды из пор грунта замедляется, поэтому при $I_0=0,2$ на момент $T=100$ консолидация еще не завершена и расчетное значение S_{∞} меньше теоретического. При $I_0=0,1$ конечная осадка выше теоретической, поровое давление понизу падает до 0,887, т.е. ниже теоретического значения $p_w^{meop}=1$.

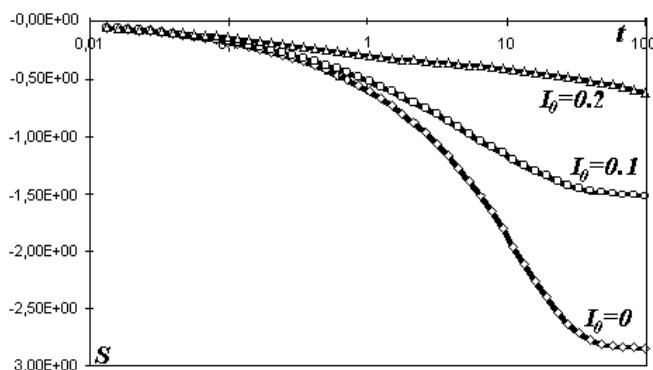


Рис. 2.17. Графики развития осадки поверхности грунта во времени для сред, обладающих различными начальными градиентами напора, работающих в условиях одномерной консолидации.

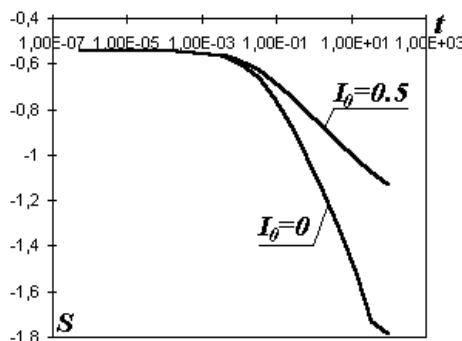


Рис. 2.18. Графики развития осадки поверхности грунта во времени для сред, обладающих различными начальными градиентами напора, работающих в условиях плоской деформации.

Далее выполнен расчет осадки поверхности основания, работающего в условиях плоской деформации под действием полосовой абсолютно гибкой нагрузки при $I_0=0$ и $I_0=0,5$. На рис. 2.18 приведены графики развития осадки центральной точки площадки нагружения во времени и эпюры поровых давлений по глубине. В условиях плоской деформации также наблюдается замедление процесса консолидации при ненулевом начальном градиенте напора, а конечная осадка $S_\infty(I_0=0,5) < S_\infty(I_0=0)$.

2.4. Вывод определяющих уравнений МКЭ для решения задач теории ползучести

Для построения численного решения задачи фильтрационной консолидации с учетом ползучести скелета грунта предварительно рассмотрим схему построения конечно-элементных уравнений для решения задач ползучести однофазной среды.

Вывод определяющих соотношений приведем в общей форме для моделей, описываемых дифференциальными соотношениями. Численное решение задач теории ползучести при интегральной форме записи реологических уравнений сопряжено с определенными машинными трудностями, поскольку для этого необходимо хранить информацию о напряженно-деформированном состоянии среды от каждого шага нагрузления или приращения нагрузки. При этом от каждого приращения нагрузки решается отдельная задача и затем по принципу суперпозиции решения складываются.

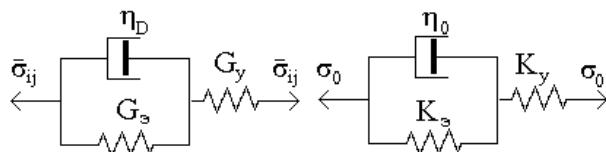


Рис. 2.19. Реакция среды на девиаторную и гидростатическую компоненты тензора напряжений.

Пусть реакция среды на девиаторное и гидростатическое нагружение описывается стандартной реологической моделью (рис. 2.19). Для вывода конечноэлементных соотношений запишем дифференциальное уравнение трехэлементной реологической модели в виде:

$$D_\sigma + \theta_D \frac{dD_\sigma}{dt} = 2G_\infty D_\varepsilon + 2G_y \theta_D \frac{dD_\varepsilon}{dt}, \quad (2.45)$$

$$T_0 + \theta_0 \frac{dT_0}{dt} = 3K_\infty E_0 + 3K_y \theta_0 \frac{dE_0}{dt}, \quad (2.46)$$

или в компонентной форме:

$$\bar{\sigma}_{ij} + \theta_D \frac{d\bar{\sigma}_{ij}}{dt} = 2G_\infty e_{ij} + 2G_y \theta_D \frac{de_{ij}}{dt}, \quad (2.47)$$

$$\sigma_0 + \theta_0 \frac{d\sigma_0}{dt} = 3K_\infty \varepsilon_0 + 3K_y \theta_0 \frac{d\varepsilon_0}{dt}. \quad (2.48)$$

где $\bar{\sigma}_{ij}$ – тензор-девиатор напряжений,

e_{ij} – тензор-девиатор деформаций,

σ_0 – шаровой тензор напряжений,

ε_0 – шаровой тензор деформаций,

θ_D , θ_0 – соответственно, время релаксации для девиатора и гидростатического тензора,

K_y , K_∞ – мгновенный и равновесный объемные модули;

G_y , G_∞ – мгновенный и равновесный модули сдвига.

Выражения (2.45-2.48) являются дифференциальной записью соотношений линейной теории наследственной ползучести с экспоненциальным ядром ползучести. Параметры реологических уравнений (2.47) и (2.48) связаны с параметрами механической модели, изображенной на рис. 2.19, следующими соотношениями:

$$\theta_D = \frac{\eta_D}{G_\infty + G_y}; \theta_0 = \frac{\eta_0}{K_\infty + K_y}; G_\infty = \frac{G_0 G_y}{G_\infty + G_y}; K_\infty = \frac{K_0 K_y}{K_\infty + K_y}.$$

Выполним вывод выражения для определения гидростатических напряжений на текущий момент времени. Заменим производную по времени конечно-разностным аналогом первого порядка, записав выражение (2.48) по центральной конечно-разностной схеме:

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_0(t_n) + \sigma_0(t_{n-1})}{2} + \theta_0 \frac{\sigma_0(t_n) - \sigma_0(t_{n-1})}{\Delta t} = \\ & = 3K_\infty \frac{\varepsilon_0(t_n) + \varepsilon_0(t_{n-1})}{2} + 3K_y \theta_0 \frac{\varepsilon_0(t_n) - \varepsilon_0(t_{n-1})}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Здесь $\sigma_0(t_n)$ и $\sigma_0(t_{n-1})$ – соответственно, гидростатические напряжения на последующий и предыдущий дискретный моменты времени;

$\varepsilon_0(t_n)$ и $\varepsilon_0(t_{n-1})$ – средние объемные деформации на последующий и предыдущий моменты времени.

Выполнив ряд несложных преобразований

$$\sigma_0(t_n) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\theta_0}{\Delta t} \right) + \sigma_0(t_{n-1}) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\theta_0}{\Delta t} \right) = \varepsilon_0(t_n) \left(\frac{3K_\infty}{2} + \frac{3K_y \theta_0}{\Delta t} \right) + \varepsilon_0(t_{n-1}) \left(\frac{3K_\infty}{2} - \frac{3K_y \theta_0}{\Delta t} \right) \quad (2.50)$$

получим выражение для определения объемной компоненты напряжений на текущий момент времени в виде:

$$\sigma_0(t_n) = \varepsilon_0(t_n) \frac{\frac{3K_\infty}{2} + \frac{3K_y \theta_0}{\Delta t}}{\frac{1}{2} + \frac{\theta_0}{\Delta t}} + \varepsilon_0(t_{n-1}) \frac{\frac{3K_\infty}{2} - \frac{3K_y \theta_0}{\Delta t}}{\frac{1}{2} + \frac{\theta_0}{\Delta t}} - \sigma_0(t_{n-1}) \frac{\frac{1}{2} - \frac{\theta_0}{\Delta t}}{\frac{1}{2} + \frac{\theta_0}{\Delta t}}. \quad (2.51)$$

По аналогии с выражением (2.50) получим выражение для девиаторных компонент тензора напряжений:

$$\bar{\sigma}_{ij}(t_n) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\theta_0}{\Delta t} \right) + \bar{\sigma}_{ij}(t_{n-1}) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\theta_0}{\Delta t} \right) = e_{ij}(t_n) \left(G_\infty + \frac{2G_y \theta_0}{\Delta t} \right) + e_{ij}(t_{n-1}) \left(G_\infty - \frac{2G_y \theta_0}{\Delta t} \right) \quad (2.52)$$

Введя обозначения:

$$A_{en} = \frac{3K_\infty \Delta t + 6K_y \theta_0}{\Delta t + 2\theta_0}; A_{en-1} = \frac{3K_\infty \Delta t - 6K_y \theta_0}{\Delta t + 2\theta_0}; A_\sigma = \frac{\Delta t - 2\theta_0}{\Delta t + 2\theta_0};$$

$$A_{Dn} = \frac{2G_\infty \Delta t + 4G_y \theta_D}{\Delta t + 2\theta_D}; A_{Dn-1} = \frac{2G_\infty \Delta t - 4G_y \theta_D}{\Delta t + 2\theta_D}; A_D = \frac{\Delta t - 2\theta_D}{\Delta t + 2\theta_D},$$

соотношения (2.51) и (2.52) запишем в более компактной форме:

$$\sigma_0(t_n) = A_{en} \varepsilon_0(t_n) + A_{en-1} \varepsilon_0(t_{n-1}) - A_\sigma \sigma_0(t_{n-1}), \quad (2.53)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}(t_n) = A_{Dn} e_{ij}(t_n) + A_{Dn-1} e_{ij}(t_{n-1}) - A_D \bar{\sigma}_{ij}(t_{n-1}). \quad (2.54)$$

Просуммируем девиаторную и шаровую части тензора напряжений. Тогда полный тензор напряжений будет определяться в соответствии с выражением:

$$\sigma_{ij}(t_n) = \sigma_0(t_n) + \bar{\sigma}_{ij}(t_n) = [A_{Dn} \cdot e_{ij}(t_n) + A_{en} \cdot \varepsilon_0(t_n)] + [A_{Dn-1} \cdot e_{ij}(t_{n-1}) + A_{en-1} \cdot \varepsilon_0(t_{n-1})] - [A_\sigma \cdot \sigma_0(t_{n-1}) + A_D \cdot \bar{\sigma}_{ij}(t_{n-1})]. \quad (2.55)$$

Для получения конечноэлементных соотношений представим выражение (2.55) в матричной форме. Тогда для трехмерного случая полный вектор напряжений на текущий момент времени в матричной форме будет записан в виде:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{array} \right\}_{t_n} = \begin{bmatrix} \frac{A_{en} + 2A_{Dn}}{3} & \frac{A_{en} - A_{Dn}}{3} & \frac{A_{en} - A_{Dn}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A_{en} - A_{Dn}}{3} & \frac{A_{en} + 2A_{Dn}}{3} & \frac{A_{en} - A_{Dn}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A_{en} - A_{Dn}}{3} & \frac{A_{en} - A_{Dn}}{3} & \frac{A_{en} + 2A_{Dn}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A_{Dn}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_{Dn}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_{Dn}}{2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\}_{t_n} + \\
 & + \begin{bmatrix} \frac{A_{en-1} + 2A_{Dn-1}}{3} & \frac{A_{en-1} - A_{Dn-1}}{3} & \frac{A_{en-1} - A_{Dn-1}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A_{en-1} - A_{Dn-1}}{3} & \frac{A_{en-1} + 2A_{Dn-1}}{3} & \frac{A_{en-1} - A_{Dn-1}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A_{en-1} - A_{Dn-1}}{3} & \frac{A_{en-1} - A_{Dn-1}}{3} & \frac{A_{en-1} + 2A_{Dn-1}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A_{Dn-1}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_{Dn-1}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_{Dn-1}}{2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\}_{t_{n-1}} - \\
 & - \begin{bmatrix} \frac{A_\sigma + 2A_D}{3} & \frac{A_\sigma - A_D}{3} & \frac{A_\sigma - A_D}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A_\sigma - A_D}{3} & \frac{A_\sigma + 2A_D}{3} & \frac{A_\sigma - A_D}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A_\sigma - A_D}{3} & \frac{A_\sigma - A_D}{3} & \frac{A_\sigma + 2A_D}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A_D}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_D}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_D}{2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{array} \right\}_{t_{n-1}}
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Для условий плоской деформации выражение (2.56) для осевых напряжений в матричной форме будет записано в виде:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{t_n} &= \begin{bmatrix} \frac{A_{en} + 2A_{Dn}}{3} & \frac{A_{en} - A_{Dn}}{3} & 0 \\ \frac{A_{en} - A_{Dn}}{3} & \frac{A_{en} + 2A_{Dn}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_{Dn}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{t_n} + \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{A_{en-1} + 2A_{Dn-1}}{3} & \frac{A_{en-1} - A_{Dn-1}}{3} & 0 \\ \frac{A_{en-1} - A_{Dn-1}}{3} & \frac{A_{en-1} + 2A_{Dn-1}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_{Dn-1}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{t_{n-1}} + \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{A_\sigma + 2A_D}{3} & \frac{A_\sigma - A_D}{3} & \frac{A_\sigma - A_D}{3} & 0 \\ \frac{A_\sigma - A_D}{3} & \frac{A_\sigma + 2A_D}{3} & \frac{A_\sigma - A_D}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{t_{n-1}}, \quad (2.57) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_z(t_n) = & \left[\frac{A_{en}}{3} - \frac{A_{Dn}}{3} \right] (\varepsilon_x(t_n) + \varepsilon_y(t_n)) + \left[\frac{A_{en-1}}{3} - \frac{A_{Dn-1}}{3} \right] (\varepsilon_x(t_{n-1}) + \varepsilon_y(t_{n-1})) - \\ & - \left[\frac{A_\sigma}{3} + \frac{2A_D}{3} \right] \sigma_z(t_{n-1}) + \left[\frac{A_\sigma}{3} - \frac{A_D}{3} \right] (\sigma_y(t_{n-1}) + \sigma_y(t_{n-1})) \end{aligned}.$$

Вектор деформаций на текущий момент времени можно выразить через текущий вектор узловых перемещений

$$\{\varepsilon(t_n)\} = [B]\{\delta(t_n)\}. \quad (2.58)$$

Тогда вектор напряжений в текущий момент времени будет равен

$$\{\sigma(t_n)\} = [D_n][B]\{\delta(t_n)\} + [D_{n-1}][\varepsilon(t_{n-1})] - [H]\{\sigma(t_{n-1})\}, \quad (2.59)$$

где коэффициенты матриц для условий плоской деформации определяются из выражений:

$$\begin{aligned}
 [D_n] &= \begin{bmatrix} \frac{A_{en} + 2A_{Dn}}{3} & \frac{A_{en} - A_{Dn}}{3} & 0 \\ \frac{A_{en} - A_{Dn}}{3} & \frac{A_{en} + 2A_{Dn}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_{Dn}}{2} \end{bmatrix}; \\
 [D_{n-1}] &= \begin{bmatrix} \frac{A_{en-1} + 2A_{Dn-1}}{3} & \frac{A_{en-1} - A_{Dn-1}}{3} & 0 \\ \frac{A_{en-1} - A_{Dn-1}}{3} & \frac{A_{en-1} + 2A_{Dn-1}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_{Dn-1}}{2} \end{bmatrix}; \\
 [H] &= \begin{bmatrix} \frac{A_\sigma + 2A_D}{3} & \frac{A_\sigma - A_D}{3} & \frac{A_\sigma - A_D}{3} & 0 \\ \frac{A_\sigma - A_D}{3} & \frac{A_\sigma + 2A_D}{3} & \frac{A_\sigma - A_D}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_D \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Варьируя приростом работ узловых сил на бесконечно малых перемещениях по методу Ритца на момент времени t_n , получим соотношение:

$$\{F(t_n)\} = \int_S [B]^T \{\sigma(t_n)\} dS \approx [B]^T \{\sigma(t_n)\} \Delta. \quad (2.60)$$

Подставив в соотношение (2.60) вместо $\{\sigma(t_n)\}$ выражение (2.59), имеем:

$$\begin{aligned}
 \{F(t_n)\} &= [B]^T [D_n] [B] \{\delta(t_n)\} \Delta + [B]^T [D_{n-1}] \{\varepsilon(t_{n-1})\} \Delta - \\
 &- [B]^T [H] \{\sigma(t_{n-1})\} \Delta
 \end{aligned} \quad (2.61)$$

или, окончательно:

$$\begin{aligned}
 [B]^T [D_n] [B] \{\delta(t_n)\} \Delta &= \{F(t_n)\} - [B]^T [D_{n-1}] \{\varepsilon(t_{n-1})\} \Delta + \\
 &+ [B]^T [H] \{\sigma(t_{n-1})\} \Delta
 \end{aligned} \quad (2.62)$$

Система уравнений (2.62) является самостартующей, поскольку значения напряжений $\{\sigma(t_{n-1})\}$ и деформаций $\{\varepsilon(t_{n-1})\}$ на момент, предшествующий очередному шагу приложения нагрузки, равны накопленным на предыдущих шагах нагрузения, или равны нулю до

приложения нагрузки.

Элементы матриц $[D]$ и $[H]$ вычисляются из выражений:

$$\frac{A_{en} + 2A_{Dn}}{3} = \frac{K_\infty \Delta t + 2K_y \theta_0}{\Delta t + 2\theta_0} + \frac{4G_\infty \Delta t + 8G_y \theta_D}{3(\Delta t + 2\theta_D)},$$

$$\frac{A_{en} - A_{Dn}}{3} = \frac{K_\infty \Delta t + 2K_y \theta_0}{\Delta t + 2\theta_0} - \frac{2G_\infty \Delta t + 4G_y \theta_D}{3(\Delta t + 2\theta_D)}, \quad \frac{A_{Dn}}{2} = \frac{G_\infty \Delta t + 2G_y \theta_D}{\Delta t + 2\theta_D},$$

$$\frac{A_{en-1} + 2A_{Dn-1}}{3} = \frac{K_\infty \Delta t - 2K_y \theta_0}{\Delta t + 2\theta_0} + \frac{4G_\infty \Delta t - 8G_y \theta_D}{3(\Delta t + 2\theta_D)},$$

$$\frac{A_{en-1} - A_{Dn-1}}{3} = \frac{K_\infty \Delta t - 2K_y \theta_0}{\Delta t + 2\theta_0} - \frac{2G_\infty \Delta t - 4G_y \theta_D}{3(\Delta t + 2\theta_D)}, \quad \frac{A_{Dn-1}}{2} = \frac{G_\infty \Delta t - 2G_y \theta_D}{\Delta t + 2\theta_D},$$

$$\frac{A_\sigma + 2A_D}{3} = \frac{\Delta t - 2\theta_0}{3(\Delta t + 2\theta_0)} + \frac{2(\Delta t - 2\theta_D)}{3(\Delta t + 2\theta_D)}, \quad \frac{A_\sigma - A_D}{3} = \frac{\Delta t - 2\theta_0}{3(\Delta t + 2\theta_0)} - \frac{2(\Delta t - 2\theta_D)}{3(\Delta t + 2\theta_D)},$$

$$\frac{A_D}{2} = \frac{\Delta t - 2\theta_D}{\Delta t + 2\theta_D}.$$

Аналогичным ходом рассуждений можно построить систему конечно-элементных уравнений для любой реологической модели, описываемой дифференциальным уравнением, в том числе и при различных уравнениях реологического состояния при девиаторном и гидростатическом нагружении.

Для тестирования программы, реализующей трехэлементную модель, рассмотрена бесконечная несжимаемая полоса высотой 1 и шириной 1 с характеристиками $G_y=5/3$; $G_\infty=2,6/3$; $\theta_G=60$ с, коэффициент Пуассона $v=0,499$. Рассмотрена задача на релаксацию напряжений при относительной вертикальной деформации $\varepsilon_y=0,1$ и на ползучесть при вертикальном давлении $\sigma_y=1$.

Аналитическое выражение для релаксации вертикальных напряжений:

$$\sigma_y(t) = \frac{\varepsilon_0}{1-v^2} \left[E_\infty + (E_y - E_\infty) e^{-\frac{t}{\theta}} \right] = 0,133 \left(3,6 + 1,4 e^{-\frac{t}{60}} \right),$$

для развития вязкоупругих вертикальных деформаций:

$$\varepsilon_y(t) = \sigma_0 (1-v^2) \left[\frac{1}{E_\infty} + \left(\frac{1}{E_y} - \frac{1}{E_\infty} \right) e^{-\frac{E_\infty}{E_y \cdot \theta} t} \right] = 0,75 \left(0,278 - 0,078 e^{-0,72 \frac{t}{60}} \right).$$

Результаты аналитических и численных расчетов приведены в табл. 2.1 и 2.2 и показывают совпадение решений.

Таблица 2.1
Тест на релаксацию напряжений

| Время, с | σ_y , по результатам аналитического решения | σ_y , по результатам численного решения | Погрешность, % |
|----------|--|--|----------------|
| 0 | 0,667 | 0,667 | 0 |
| 10 | 0,636 | 0,638 | 0,3 |
| 20 | 0,612 | 0,614 | 0,32 |
| 30 | 0,592 | 0,593 | 0,17 |
| 40 | 0,574 | 0,576 | 0,35 |
| 50 | 0,560 | 0,561 | 0,18 |
| 60 | 0,547 | 0,549 | 0,36 |

Таблица 2.2
Тест на ползучесть

| Время, с | ε_y , по результатам аналитического решения | ε_y , по результатам численного решения | Погрешность, % |
|----------|---|---|----------------|
| 0 | 0,15 | 0,149 | 0,67 |
| 10 | 0,157 | 0,156 | 0,67 |
| 20 | 0,162 | 0,162 | 0 |
| 30 | 0,168 | 0,167 | 0,6 |
| 40 | 0,172 | 0,172 | 0 |
| 50 | 0,176 | 0,176 | 0 |
| 60 | 0,178 | 0,179 | 0,6 |

Кроме этого рассмотрена задача о нагружении слоя грунта высотой 10, загруженного по поверхности вертикальной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q=1$ в компрессионных условиях (рис. 2.20). В задаче отслеживалось перемещение поверхности в течение времени $t=500$. Для тестирования рассматривались модели, для которых достаточно просто получить аналитическое решение. При разбиении времени нагружения на 20 интервалов численные решения с точностью до 0,2...0,7% совпадают с аналитическими, а графики зависимости осадка-время на рис. 2.21–2.23, полученные по численному и аналитическому решению, совпадают.

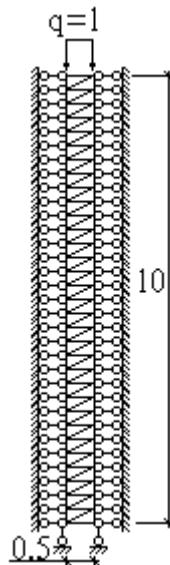


Рис. 2.20. Конечноэлементная схема
для тестирования задач
теории ползучести
методом конечных элементов.

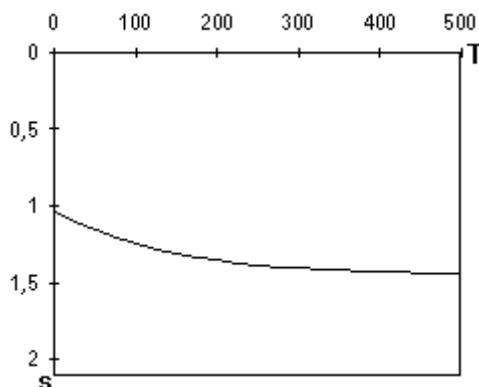


Рис. 2.21. График развития осадки поверхности
во времени слоя грунта с вязкоупругой реакцией
на девиаторное нагружение и упругой
на гидростатическое.

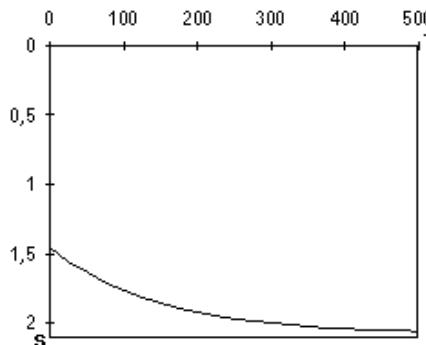


Рис. 2.22. График развития осадки поверхности во времени слоя грунта с упругой реакцией на девиаторное нагружение и вязкоупругой на гидростатическое.

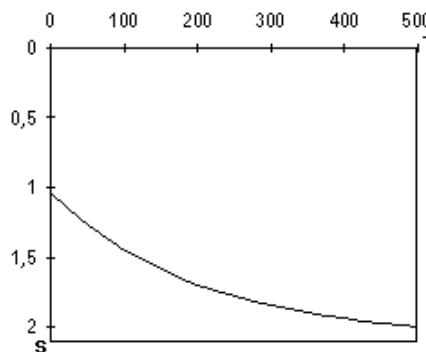


Рис. 2.23. График развития осадки поверхности во времени слоя грунта с вязкоупругой реакцией на девиаторное и гидростатическое нагружение.

1. Среда с упругой реакцией на гидростатическое нагружение и вязкоупругой на девиаторное нагружение. В расчетах заданы следующие характеристики среды $G_y = 4$, $G_\infty = 2$, $\theta_D = 100$, $K_y = K_\infty = 4$. Для этого случая график зависимости осадки поверхности столба грунта во времени представлен на рис. 2.21.

2. Среда с упругой реакцией на девиаторное нагружение и вязкоупругой на гидростатическое нагружение. Задача решена при следующих характеристиках среды $G = 2$, $K_y = 4$, $K_\infty = 2$, $\theta_0 = 100$. Результаты расчета показаны на рис. 2.22.

3. Среда с вязкоупругой реакцией на девиаторное гидростатическое нагружение с одинаковым временем релаксации и постоянным коэффициентом Пуассона. Характеристики среды $G_y = 4$, $G_\infty = 2$, $K_y = 4$, $K_\infty = 2$, $\theta_D = \theta_0 = 100$. Результаты расчета приведены на рис. 2.23.

Упругое решение для такой схемы при $G = 2$ и $K = 2$ дает величину осадки $s = 2.0758$.

2.5. Вывод определяющих уравнений МКЭ для решения задач теории фильтрационной консолидации с учетом ползучести скелета грунта

Рассматривая поровое давление как нейтральное, не вызывающее расширения грунта, конечно-элементную систему уравнений теории фильтрационной консолидации с учетом ползучести скелета грунта можно получить объединением систем уравнений (2.41) и (2.62):

$$\left\{ \begin{array}{l} [B]^T [D_n] [B] \{u(t_n)\} \Delta + [C] \{p(t_n)\} = \\ = \{F(t_n)\} - [B]^T [D_{n-1}] \{\varepsilon(t_{n-1})\} \Delta + [B]^T [H] \{\sigma(t_{n-1})\} \Delta \\ [C]^T \{u(t_n)\} - \frac{\Delta t}{2} [K_f] \{p(t_n)\} = [C]^T \{u(t_{n-1})\} + \frac{\Delta t}{2} [K_f] \{p(t_{n-1})\} \end{array} \right. . \quad (2.63)$$

Проанализируем эффекты, возникающие при нагружении среды в условиях одномерного нагружения под действием равномерно распределенной единичной нагрузки. Пусть среда, имеющая характеристики $G_\infty=4$, $K_\infty=4$, $\theta_D=\theta_K=100$, $k_x=k_y=0,0001$, характеризуется постоянным коэффициентом Пуассона. В расчетах рассмотрены следующие варианты: $G_y=K_y=4$, что соответствует классическому решению задачи фильтрационной консолидации в упругой постановке; $G_y=K_y=5$; $G_y=K_y=40$; $G_y=K_y=400$. Результаты расчетов приведены на рис. 2.24 в виде графиков развития во времени осадки поверхности и порового давления на непроницаемой нижней границе. Из расчетов следует, что увеличение разницы между мгновенными и равновесными модулями приводит к снижению скорости развития осадки (конечная осадка во всех рассматриваемых случаях определяется равновесными модулями и составляет $S_\infty=0,10714$). Поровое давление в любом случае приложении нагрузки мгновенно возрастает до максимального значения, равного приложеному давлению, а скорость его падения при одинаковых значениях равновесных модулей зависит от разницы между мгновенными и равновесными модулями: чем выше эта разница, тем быстрее происходит падение порового давления. После падения порового давления до нуля процесс развития осадок определяется только ползучестью скелета грунта. При этом, чем больше разница между мгновенными и равновесными модулями, тем большая доля осадки определяется ползучестью и меньшая – фильтрационной консолидацией.

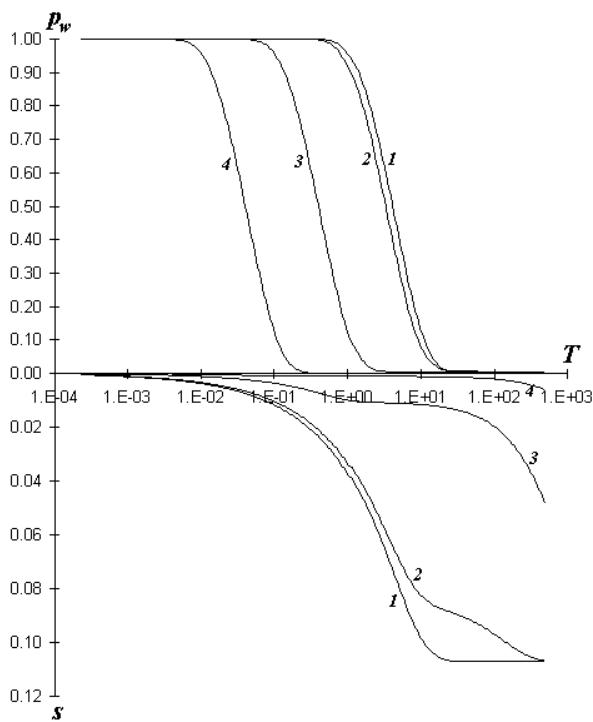


Рис. 2.24. Графики развития порового давления и осадки поверхности во времени слоя грунта в условиях одномерного нагружения при следующих механических характеристиках: $G_\infty=4, K_\infty=4, \theta_D=\theta_K=100, k_x=k_y=0,0001$; 1 – $G_y=4, K_y=4$; 2 – $G_y=5, K_y=5$; 3 – $G_y=40, K_y=40$; 4 – $G_y=400, K_y=400$.

Таким образом, достоинством рассмотренного решения (выражение 2.63) является описание эффектов как одновременного протекания процессов фильтрационной консолидации и ползучести, так и развития осадок вторичной консолидации, определяемых только ползучестью скелета грунта. Недостатком же является тот факт, что данное решение не отражает наблюдавшегося во многих лабораторных опытах эффектов достижения максимального порового не в момент приложения нагрузки, а через некоторый промежуток времени.

Одной из теорий, описывающей такое явление, является теория консолидации Ю.К. Зарецкого.

В соответствии с основными положениями теории консолидации грунтов Ю.К. Зарецкого давления, возникающие в поровой жидкости, не являются нейтральными, а вызывают в скелете грунта дополнительную деформацию расширения. Эффекты достижения значения максимального порового давления не в момент приложения нагрузки, а со временем, возникают при различных скоростях объемных деформа-

ций: деформации расширения, вызванной воздействием порового давления, и деформации сжатия, вызванной действием внешнего уплотняющего давления. Экстремальный характер развития порового давления описан также Н.А. Цытовичем и З.Г. Тер-Мартиросяном для среды с реологическим уравнением состояния скелета, описываемым уравнениями наследственной ползучести, поры которой заполнены сжимаемой жидкостью.

Выберем наиболее простые соотношения, описывающие отмечаемый эффект и для которых возможно получить безитерационное решение численным методом.

Пусть объемная деформация расширения скелета происходит мгновенно. Тогда реакция грунта на расширение характеризуется некоторым модулем объемного расширения K_p . Пусть реакция скелета грунта на объемные сжимающие напряжения описывается линейным законом наследственной ползучести

$$\varepsilon_v(t) = \frac{1}{3K} \left(\sigma_0(t) + \int_0^t K(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau \right). \quad (2.64)$$

Реакция среды на сдвиг также определяется линейным законом наследственной ползучести

$$\gamma_i(t) = \frac{1}{2G} \left(\tau_i(t) + \int_0^t G(t, \tau) \tau_i(\tau) d\tau \right). \quad (2.65)$$

Соотношения (2.64) и (2.65) могут быть представлены, соответственно, в виде дифференциальных выражений (2.47) и (2.48) при экспоненциальных ядрах ползучести.

Тогда выражение (2.48) в случае учета взаимодействия фаз может быть записано в виде:

$$\sigma_0 + \theta_0 \frac{d\sigma_0}{dt} = 3K_\infty \varepsilon_0 - \frac{K_\infty}{K_p} p_w + 3K_y \theta_0 \frac{d\varepsilon_0}{dt} - \frac{K_y \theta_0}{K_p} \frac{dp_w}{dt},$$

или в конечно-разностной форме окончательно выражение для объемных напряжений в момент времени t_n приведем без промежуточных преобразований:

$$\begin{aligned} \sigma_0(t_n) &= \varepsilon_0(t_n) \frac{3K_\infty \Delta t + 6K_y \theta_0}{\Delta t + 2\theta_0} + \varepsilon_0(t_{n-1}) \frac{3K_\infty \Delta t - 6K_y \theta_0}{\Delta t + 2\theta_0} - \\ &- \sigma_0(t_{n-1}) \frac{\Delta t - 2\theta_0}{\Delta t + 2\theta_0} - p_w(t_n) \frac{K_\infty \Delta t + 2K_y \theta_0}{K_p (\Delta t + 2\theta_0)} - p_w(t_{n-1}) \frac{K_\infty \Delta t - 2K_y \theta_0}{K_p (\Delta t + 2\theta_0)} \end{aligned} \quad (2.66)$$

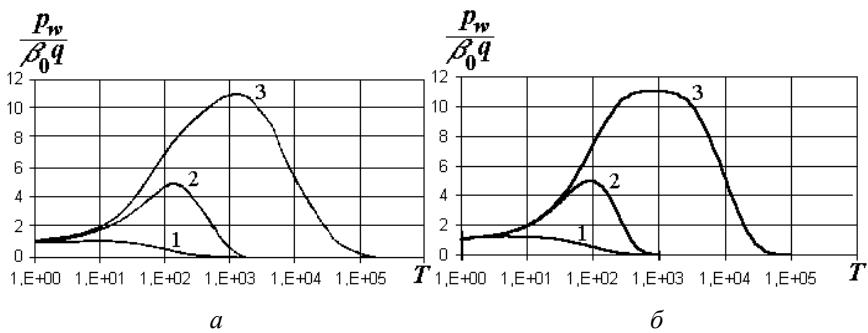


Рис. 2.25. Изменение приведенного значения порового давления во времени

$$\text{при } \delta = 0,1 \left[\frac{1}{T} \right], \delta_1 = 0,01 \left[\frac{1}{T} \right] \text{ и } 1 - \frac{\pi^2}{h^2} c_v = 0,1 \left[\frac{1}{T} \right];$$

$$2 - \frac{\pi^2}{h^2} c_v = 0,01 \left[\frac{1}{T} \right]; 3 - \frac{\pi^2}{h^2} c_v = 0,0001 \left[\frac{1}{T} \right].$$

a – решение Ю.К. Зарецкого (1967); *б* – численное решение.

Введя обозначения:

$$A_{pn} = \frac{K_\infty \Delta t + 2K_y \theta_0}{K_p(\Delta t + 2\theta_0)}; A_{pn-1} = \frac{K_\infty \Delta t - 2K_y \theta_0}{K_p(\Delta t + 2\theta_0)}$$

получим полную систему уравнений, умножив для симметризации матрицы жесткости все слагаемые уравнения неразрывности на величину A_{pn} :

$$\begin{cases} [B]^T [D_n] [B] \{u(t_n)\} \Delta + A_{pn} [C] \{p(t_n)\} = \\ = \{F(t_n)\} - [B]^T [D_{n-1}] \{\varepsilon(t_{n-1})\} \Delta + [B]^T [H] \{\sigma(t_{n-1})\} \Delta - A_{pn-1} [C] \{p(t_n)\} \\ A_{pn} [C]^T \{u(t_n)\} - \frac{\Delta t}{2} A_{pn} [K_f] \{p(t_n)\} = A_{pn} [C]^T \{u(t_{n-1})\} + \frac{\Delta t}{2} A_{pn} [K_f] \{p(t_{n-1})\} \end{cases} .(2.67)$$

Сравнение результатов аналитического решения Ю.К. Зарецкого (1967) и предлагаемого численного расчета в соответствии с системой уравнений (2.67), выполненных для компрессионных условий нагрузления, показывает их идентичность (рис. 2.25). Небольшое отличие в форме графиков связано, очевидно, с тем, что графики Ю.К. Зарецкого построены по «ключевым» точкам, т.е. по значениям приведенного порового давления в моменты времени 10^n , в то время как численное решение позволило выполнить более подробный анализ картины изменения порового давления во времени.

2.6. Исследование консолидационных процессов в глинистых грунтах в лабораторных условиях

Целью лабораторных являлось исследование характера деформирования слабых глинистых грунтов Санкт-Петербурга во времени и выбора механической модели работы грунта под нагрузкой. Образцы грунтов отбирались при бурении скважин в основании Сооружений защиты Санкт-Петербурга от наводнений.

Лабораторные опыты проводились в гидрокомпрессионном приборе на образцах неяснослоистых суглинков средних пылеватых серого цвета мягкотекучей консистенции (слой №24 по проекту строительства Сооружений защиты Ленинграда от наводнений от 1997 г.), на образцах ленточных пылеватых суглинков тяжелых и глин серо-коричневого цвета мягкотекучей консистенции (слой №25), а также на искусственных пастах, приготовленных из этих грунтов. В опытах исследовались фильтрационные свойства, изучалась анизотропия механических и фильтрационных свойств, изменение коэффициента фильтрации в процессе уплотнения, исследовался характер изменения порового давления во времени.

Многочисленными исследованиями установлено, что проницаемость глинистых грунтов изменяется в процессе консолидации. Проницаемость пылевато-глинистых грунтов зависит от множества факторов: вида грунта, пористости, степени влажности, вязкости жидкости, температуры и др. Введение переменности характеристик грунта усложняет расчетный аппарат, ввиду чего необходимо определять границы нагрузок, в пределах которых характеристики грунта можно принять неизменным или осредненным.

Опыты проводились по компрессионно-фильтрационной схеме для образцов грунта слоев 24 и 25, вырезанных параллельно и перпендикулярно природному залеганию. Диаметр образца составлял 7,1 см, площадь поперечного сечения – 40 см², высота образца – 2 см.

Методика испытаний заключалась в следующем. Сразу после установки образца грунта 1 в ГКП через отверстие в центральной части боковой стенки кольца 2 в образец внедрялась игла 4 датчика порового давления 3 (рис. 2.26). К образцу ступенями прикладывалась уплотняющая нагрузка штампом 5, соединенным иглой 6, проходящей сквозь образец грунта, с рычажной системой 7. Деформация образца определялась по перемещению стержня 9, приваренного к соединительному штоку 8, с помощью индикатора часового типа 10 или прогибомера Аистова. Шаг увеличения нагрузки был принят логарифмический, т.е. величина очередной ступени нагрузки равна суммарной нагрузке на рычаге от всех предыдущих ступеней. Каждая ступень на-

грузки выдерживалась в течение 24 ч, что обеспечивало 2-3-кратную повторность определения коэффициента фильтрации, который определялся после стабилизации порового давления в образце от очередной ступени нагрузки по расходу воды. Для этого в образце после первой ступени нагружения создавался гидростатический напор с помощью сосуда 11, заполненного водой и соединенного с верхней камерой 12 ГКП гибким шлангом. Коэффициент фильтрации вычислялся по известной формуле:

$$k_{\phi} = \frac{hQ}{HF\Delta t},$$

где Q – расход воды за время Δt ;

H – гидростатический напор;

$F = 40 \text{ см}^2$ – площадь образца;

h – средняя высота образца на промежуток времени Δt .

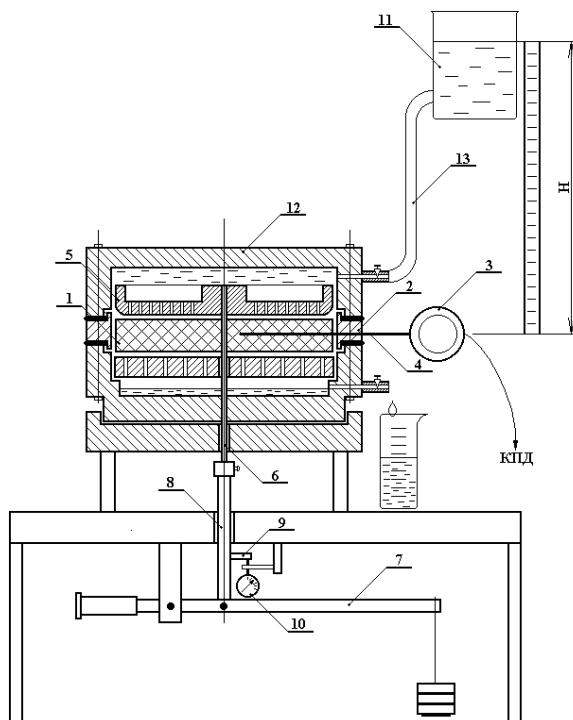


Рис. 2.26. Схема лабораторных опытов в гидрокомпрессионном приборе:

- 1 – образец грунта, 2 – кольцо, 3 – датчик порового давления,
- 4 – игла датчика порового давления, 5 – штамп,
- 6 – игла штампа,
- 7 – рычажная система, 8 – соединительный шток,
- 9 – стержень,
- 10 – прогибомер, 11 – сосуд, 12 – верхняя камера ГКП.

Отсчеты порового давления и перемещений штампа снимались на моменты времени 1, 5, 10, 30 с, 1, 2, 5, 10, 20, 30 мин., 1, 2, 3, 6, 12 и 24 ч.

Перед началом испытаний определялись физические свойства грунта: удельный вес, характерные влажности (природная, предел раскатывания, предел текучести), по которым вычислялись коэффициент пористости, степень водонасыщения, число пластичности, показатель текучести. Физические характеристики неянослоистых суглинков, на которых проводились лабораторные испытания, находились в интервалах: $\gamma=18,7\ldots19,1 \text{ кН/м}^3$, $\gamma_d=13,55\ldots14,16 \text{ кН/м}^3$, $W=0,349\ldots0,38$, $e=0,907\ldots0,993$, $S_r=1$, $W_p=0,211\ldots0,257$, $W_L=0,287\ldots0,33$, $I_p=0,085\ldots0,108$, $I_L=1\ldots1,59$; а ленточных суглинков и глин: $\gamma=16,8\ldots17,8 \text{ кН/м}^3$, $\gamma_d=11,2\ldots12,3 \text{ кН/м}^3$, $W=0,454\ldots0,515$, $e=1,2\ldots1,46$, $S_r=0,98\ldots1$, $W_p=0,225\ldots0,278$, $W_L=0,405\ldots0,524$, $I_p=0,18\ldots0,246$, $I_L=0,75\ldots1,27$.

Результаты испытаний приведены на рис. 2.27-2.37. Характерные графики изменения коэффициента порового давления в природных образцах во времени для каждой ступени нагрузки представлены в полулогарифмических координатах на рис. 2.27, 2.28.

Опыты показывают, что исследуемые грунты в природном состоянии имеют существенно неоднородные физико-механические свойства. Так если для паст, приготовленных из тех же грунтов, с заданным физическим составом опыты имеют удовлетворительную повторяемость (рис. 2.29, 2.30), то в опытах, проведенных на грунтах природного сложения, наблюдается весьма широкий разброс результатов испытаний (рис. 2.31–2.33). Тем не менее, проведенные лабораторные опыты позволяют выявить характерные особенности работы грунта под нагрузкой.

Приложение гидростатического давления к образцу приводит к развитию дополнительного уплотнения грунта, после чего наблюдается набухание образца. Как уплотнение, так и набухание от давления столба воды развиваются во времени, причем величина осадки уплотнения превышает осадку набухания.

Семейства компрессионных графиков, полученных по результатам испытаний образцов, вырезанных параллельно и перпендикулярно природному залеганию (рис. 2.34, 2.35), не позволяют выявить явной деформационной анизотропии.

При исследовании изменения фильтрационных свойств грунтов в процессе уплотнения отмечается тенденция к уменьшению проницаемости при уменьшении коэффициента пористости (рис. 2.36, 3.37). Для неянослоистых суглинков вертикальный коэффициент фильтрации в среднем уменьшался с $3 \cdot 10^{-7} \text{ см/с}$ до $1 \cdot 10^{-7} \text{ см/с}$ при изменении коэффициента пористости от 0,975 до 0,725. Подобное же снижение коэф-

фициента фильтрации наблюдалось и для образцов, вырезанных перпендикулярно природному залеганию. Следует заметить, что явной фильтрационной анизотропии для неянослоистого суглинка не выявлено. Уменьшение коэффициента фильтрации в среднем 3 раза наблюдается при существенном изменении коэффициента пористости. Кроме этого, снижение водопроницаемости находится в пределах точности практических методов определения коэффициента фильтрации $A \cdot 10^{-m}$, поэтому расчетный коэффициент фильтрации принят неизменным и равным среднему опытному значению $k_x = k_y = 2 \cdot 10^{-7}$ см/с.

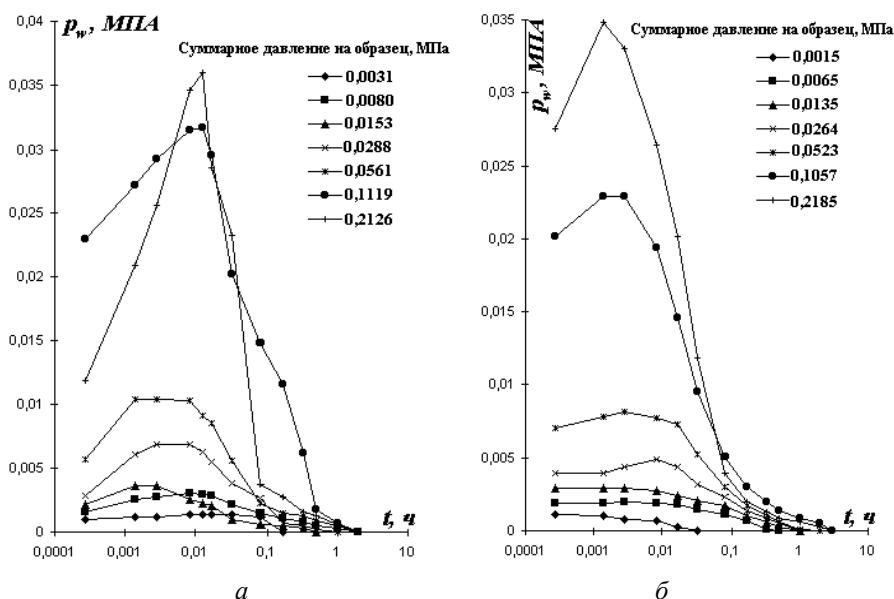


Рис. 2.27. Графики изменения избыточного порового давления в центре образца грунта слоя 24, вырезанного параллельно (а) и перпендикулярно (б) природному залеганию при различных уплотняющих давлениях.

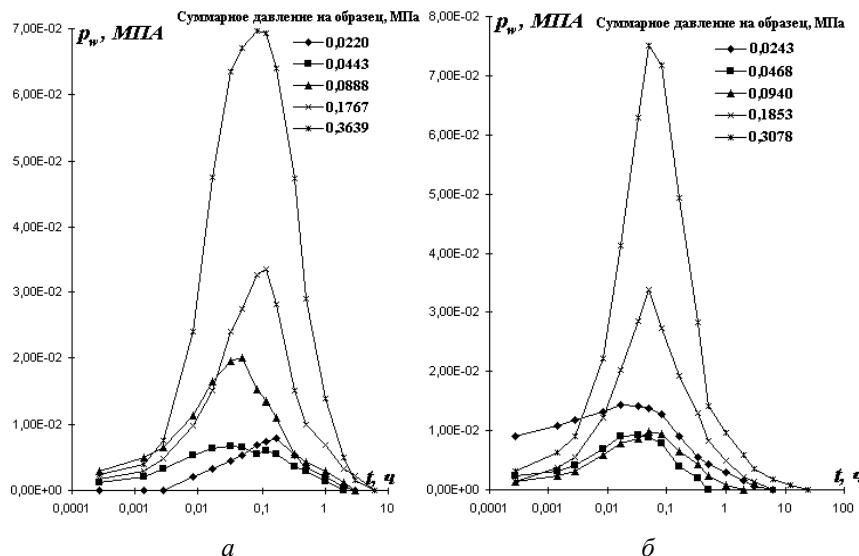


Рис. 2.28. Графики изменения избыточного порового давления в центре образца грунта слоя 25, вырезанного параллельно (а) и перпендикулярно (б) природному залеганию при различных уплотняющих давлениях.

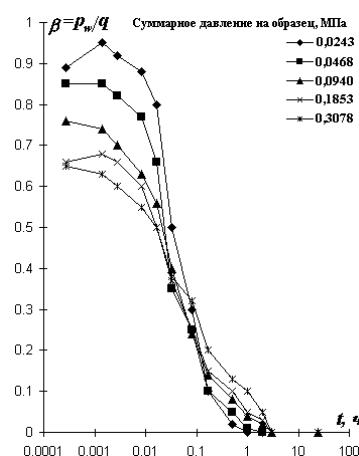


Рис. 2.29. Графики изменения коэффициента порового давления в образце искусственной пасты, приготовленной из грунтов 24 и 25 слоя.

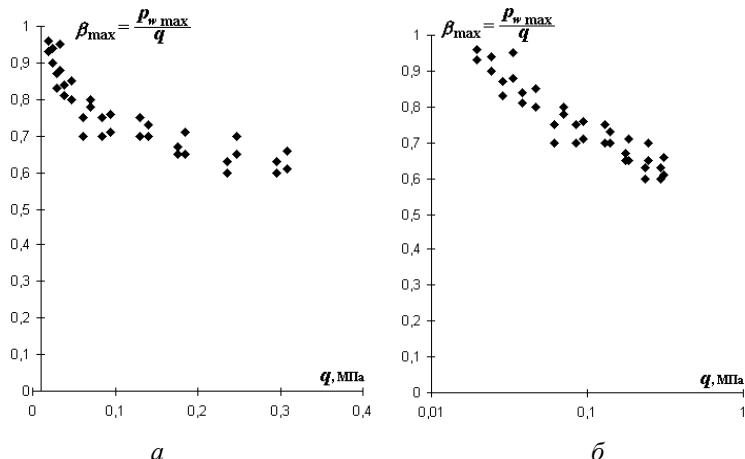


Рис. 2.30. Зависимость максимального коэффициента порового давления в центре образцов искусственной пасты от величины уплотняющего давления в обычных (а) и полулогарифмических (б) координатах.

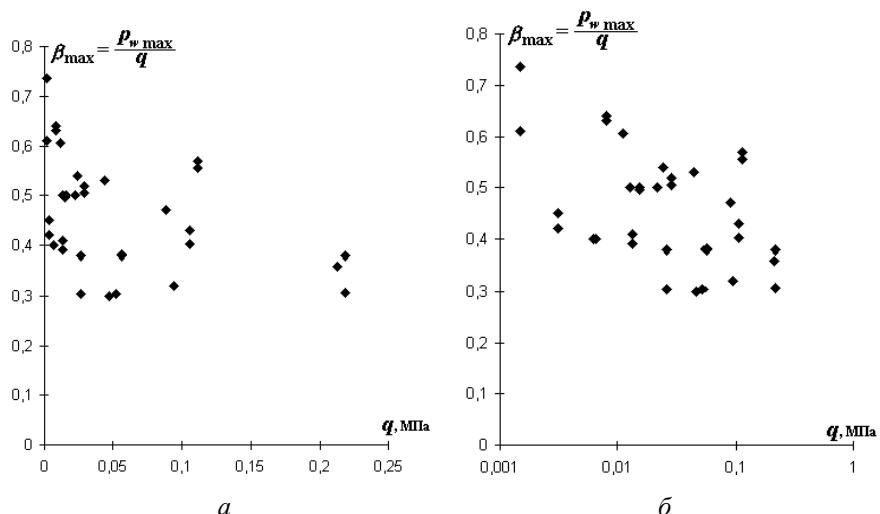


Рис. 2.31. Зависимость максимального коэффициента порового давления в центре образца грунта слоя 24 от величины уплотняющего давления в обычных (а) и полулогарифмических (б) координатах.

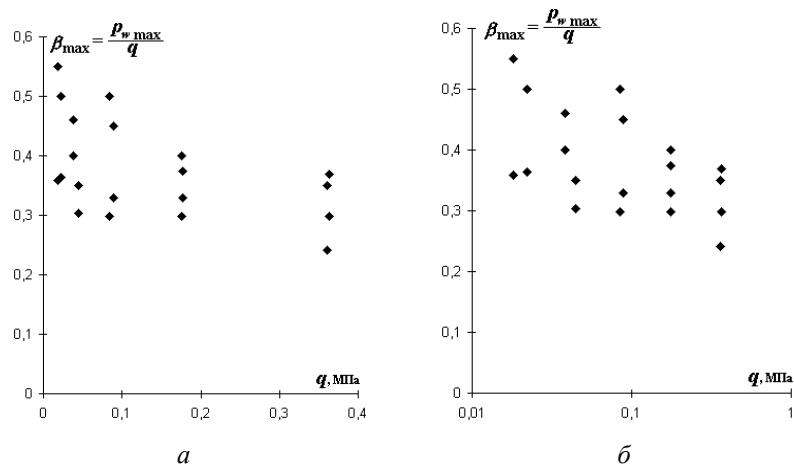


Рис. 2.32. Зависимость максимального коэффициента порового давления в центре образца грунта слоя 25, вырезанного параллельно природному залеганию, от величины уплотняющего давления в обычных (*а*) и полулогарифмических (*б*) координатах.

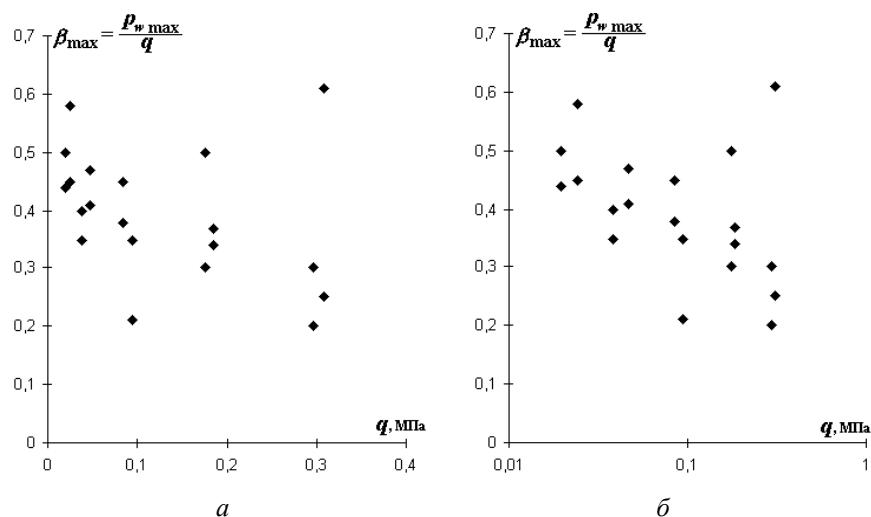


Рис. 2.33. Зависимость максимального коэффициента порового давления в центре образца грунта слоя 25, вырезанного перпендикулярно природному залеганию, от величины уплотняющего давления в обычных (*а*) и полулогарифмических (*б*) координатах.

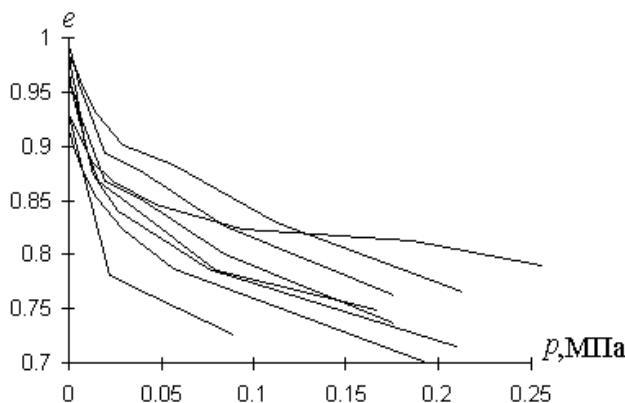


Рис. 2.34. Компрессионные кривые для неяснослоистых суглинков.

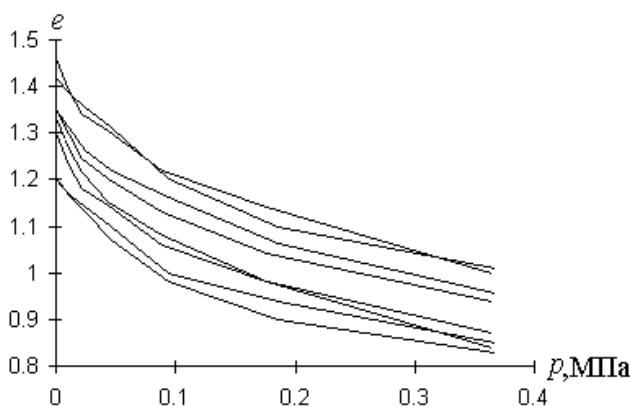


Рис. 2.35. Компрессионные кривые для ленточных суглинков и глин.

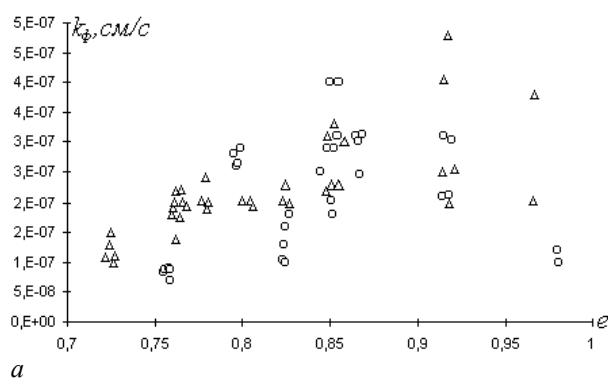


Рис. 2.36 (начало).

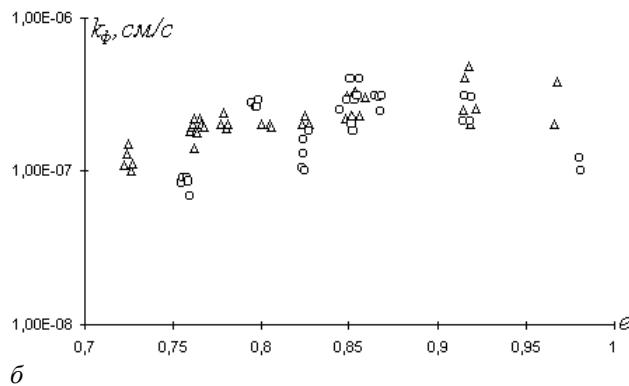


Рис. 2.36 (окончание). Графики зависимости коэффициента фильтрации от коэффициента пористости в обычных и полулогарифмических координатах для образцов неяснослоистых суглинков, вырезанных параллельно (○) и перпендикулярно (Δ) природному залеганию.

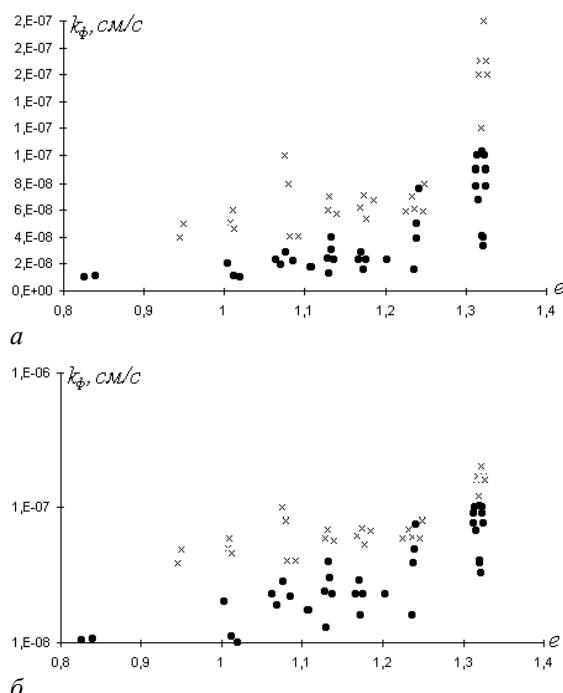


Рис. 2.37. Графики зависимости коэффициента фильтрации от коэффициента пористости в обычных и полулогарифмических координатах для образцов ленточных суглинков и глины, вырезанных параллельно (●) и перпендикулярно (×) природному залеганию.

Слоистые суглинки и глины (слой 25) имеют проницаемость в горизонтальном направлении приблизительно в 2,5 раза выше, чем в вертикальном направлении. Опытами зафиксировано снижение вертикального коэффициента фильтрации в среднем с $7 \cdot 10^{-8}$ см/с до $2 \cdot 10^{-8}$ см/с при уменьшении коэффициента пористости с 1,33 до 1,0, т.е. в 3,5 раза. Горизонтальный коэффициент фильтрации уменьшался в среднем с $2 \cdot 10^{-7}$ см/с до $5 \cdot 10^{-8}$ см/с, т.е. в 4 раза. Таким образом, снижение водопроницаемости слоистых суглинков также находится в пределах точности практического определения коэффициента фильтрации $A \cdot 10^m$, поэтому расчетные коэффициенты фильтрации приняты неизменными и равными средним опытным значениям $k_x = 6 \cdot 10^{-8}$ см/с, $k_y = 2,5 \cdot 10^{-8}$ см/с.

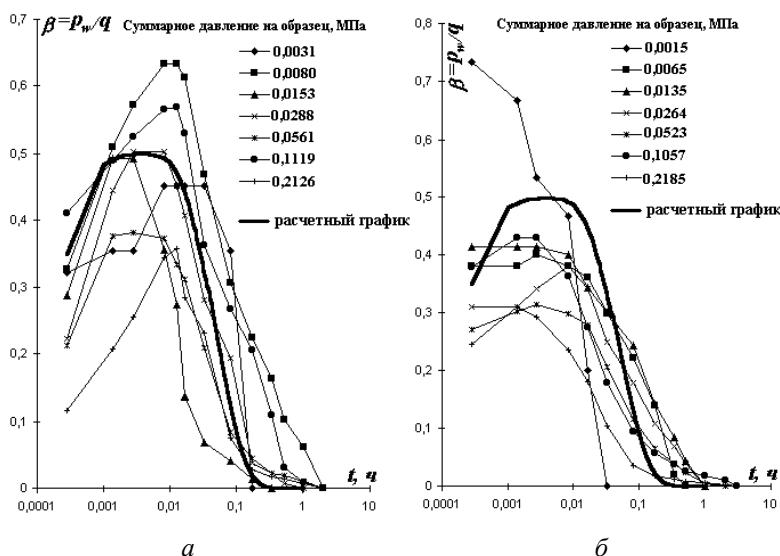


Рис. 2.38. Графики изменения коэффициента порового давления в центре образца грунта слоя 24, вырезанного параллельно (а) и перпендикулярно (б) природному залеганию при различных уплотняющих давлениях (сплошной линией показан расчетный график изменения коэффициента порового давления).

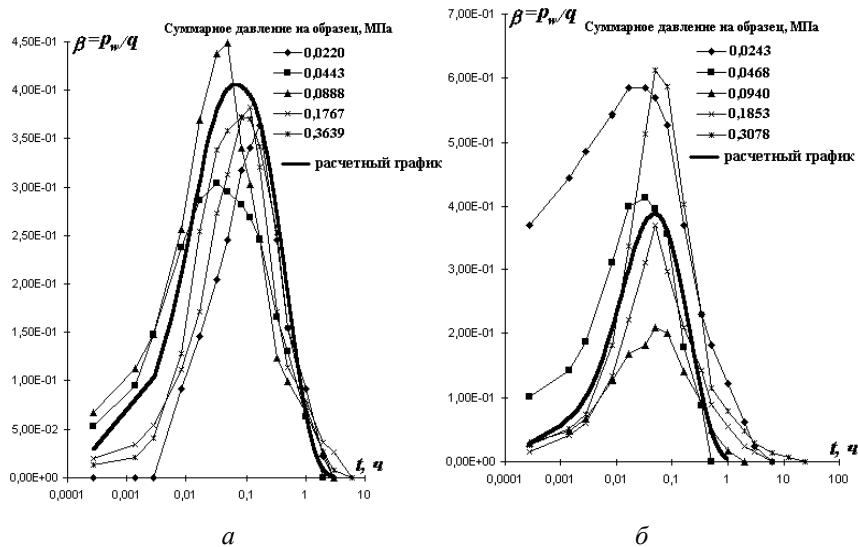


Рис. 2.39. Графики изменения коэффициента порового давления в центре образца грунта слоя 25, вырезанного параллельно (а) и перпендикулярно (б) природному залеганию при различных уплотняющих давлениях (сплошной линией показан расчетный график изменения коэффициента порового давления).

Анализ графиков изменения порового давления во времени показывает, что в искусственных пастах поровое давление достигает максимума практически в момент приложения нагрузки, причем максимальный коэффициент порового давления достигает 0,95, снижаясь по мере уплотнения до 0,7...0,75 (см. рис. 2.29). В то же время в образцах неяснослоистых суглинков максимальное значение порового давления достигается через 5...30 секунд после приложения очередной ступени нагрузки (см. рис. 2.38), а в образцах ленточных суглинков и глин максимум порового давления наблюдается на 2...5-й минуте после приложения нагрузки (см. рис. 2.39). Эти факты однозначно свидетельствуют о том, что, помимо фильтрационного сопротивления отжатию воды, исследуемые грунты в природном состоянии обладают явно выраженным свойствами вязкого сопротивления деформированию.

Как показано в разделе 2.5, одной из теорий, описывающей наблюдаемые эффекты, является теория консолидации Ю.К. Зарецкого (1967). Выполним оценку реологических параметров грунтов в рамках модели, которая, с одной стороны, описывает наблюдаемые эффекты, с другой стороны, содержит наименьшее число параметров и наиболее проста в математической реализации. Пусть вязкие свойства скелета

грунта при уплотнении определяются законами линейной теории наследственной ползучести с экспоненциальным ядром ползучести:

$$K_c(t-\tau) = K_v(t-\tau) = \delta \cdot e^{-\delta_1(t-\tau)},$$

где δ, δ_1 – константы ядра ползучести,

$K_c(t-\tau)$ – скорость ползучести при чистом сдвиге,

$K_v(t-\tau)$ – скорость ползучести при объемном сжатии.

Скорость ползучести при разуплотнении примем равной нулю, т.е. реакция скелета грунта на разуплотнение мгновенна. Тогда изменение порового давления во времени будет определяться в соответствии с выражением (Ю.К. Зарецкий, 1967)

$$p_w = \beta_0 q \frac{4}{\pi} \left[\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \left(e^{-\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 c_v t} + \frac{\delta}{\delta_1} \cdot \frac{e^{-\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 c_v t} - e^{-\delta_1 t}}{1 - \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 \frac{c_v}{\delta_1}} \right) \right],$$

где q – давление по штампу;

β_0 – коэффициент начального порового давления;

$c_v = \frac{k_\phi \beta_0}{\gamma_w m_{v0}}$ – коэффициент консолидации;

k_ϕ – коэффициент фильтрации в направлении дренирующей поверхности;

m_{v0} – мгновенное значение коэффициента относительной сжимаемости, которое определяется через равновесное значение коэффициента относительной сжимаемости в соответствии с выражением

$$m_{v0} = \frac{\delta_1 m_{v\infty}}{\delta + \delta_1}.$$

Неизвестные параметры ядер ползучести подберем, исходя из известных по опытам значений максимального порового давления в центре образца и момента времени его достижения. Скорость изменения порового давления в момент t_{\max} достижения максимума равна нулю, т.е.

$$\frac{dp_w}{dt} = \beta_0 q \frac{4}{\pi} \left[\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \left(-\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 c_v e^{-\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 c_v t_{max}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\delta}{\delta_1} \cdot \frac{-\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 c_v e^{-\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 c_v t_{max}} + \delta_1 e^{-\delta_1 t_{max}}}{1 - \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 \frac{c_v}{\delta_1}} \right) \right] = 0$$

Таким образом, мы имеем систему из двух трансцендентных уравнений с двумя неизвестными δ и δ_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\beta_{max}}{\beta_0} - \frac{4}{\pi} \left[\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \left(c_v e^{-\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 c_v t_{max}} + \frac{\delta}{\delta_1} \cdot \frac{c_v e^{-\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 c_v t_{max}} - e^{-\delta_1 t_{max}}}{1 - \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 \frac{c_v}{\delta_1}} \right) \right] = 0 \\ \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \left(-\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 c_v e^{-\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 c_v t_{max}} + \frac{\delta}{\delta_1} \cdot \frac{-\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 c_v e^{-\left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 c_v t_{max}} + \delta_1 e^{-\delta_1 t_{max}}}{1 - \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2 \frac{c_v}{\delta_1}} \right) = 0 \end{array} \right.$$

Исходя из опытных данных, принимаем средние значения характеристик для неянослоистых суглинков $k_\phi = 0,00072$ см/ч, $m_v = 0,44$ МПа⁻¹, $t_{max} = 17$ с = $4,3 \cdot 10^{-3}$ ч, $\beta_0 = 0,35$, $\beta_{max} = 0,5$, для ленточных суглинков и глин $k_\phi = 0,000216$ см/ч, $m_v = 0,468$ МПа⁻¹, $t_{max} = 3$ мин = $0,05$ ч, $\beta_0 = 0,03$, $\beta_{max} = 0,39$.

Выполняя численное решение системы уравнений, найдем значения параметров ядер ползучести:

- для неянослоистого суглинка $\delta = 687,427$ 1/ч, $\delta_1 = 1600,903$ 1/ч;
- для ленточных суглинков и глин $\delta = 931,225$ 1/ч, $\delta_1 = 73,8$ 1/ч.

Отсюда несложно перейти к параметрам «нормальной» реологической модели, вычисляемым из выражений

$$G_\infty = \frac{1-2v}{2(1-v)m_{v\infty}}; K_\infty = \frac{2G_\infty(1+v)}{3(1-v)}; G_0 = G_\infty \left(1 + \frac{\delta}{\delta_1} \right);$$

$$K_0 = K_\infty \left(1 + \frac{\delta}{\delta_1} \right); \quad \theta = \frac{1}{\delta + \delta_1}.$$

Предполагая коэффициент Пуассона равным 0,3, получим:

- для неяснослоистого суглинка $G_\infty=0,649$ МПа, $K_\infty=1,4067$ МПа, $G_0=0,9277$ МПа, $K_0=2,0107$ МПа, $\theta=0,000437$ ч=1,6 с;
- для ленточного суглинка $G_\infty=0,6105$ МПа, $K_\infty=1,3227$ МПа, $G_0=8,3129$ МПа, $K_0=18,01$ МПа, $\theta=0,000995$ ч=3,6 с.

Параметры ползучести весьма низкие и применимы только в рамках рассмотренной модели грунта.

На рис. 2.38, 2.39 сплошной линией показаны графики изменения коэффициента порового давления во времени в центре образца, построенные по результатам численного решения системы уравнений (2.67) с использованием характеристик, полученных в лабораторных опытах. Сравнение результатов лабораторных опытов и численных расчетов показывает, что рассмотренная модель фильтрационной консолидации грунта с учетом ползучести скелета при минимальном числе механических параметров достаточно хорошо описывает поведение глинистого грунта в лабораторных условиях.

2.7. Исследование развития деформаций глинистых грунтов в натурных условиях

Для измерения послойных деформаций значительной по глубине сжимаемой толщи под руководством к.т.н., доц. А.В. Голли и при участии автора разработано устройство и методика измерения послойных деформаций основания.

Устройство (рис. 2.40,*a*) состоит из глубинных деформационных марок 7, выполненных в виде тонких металлических колец с лапками из пружинной стали (рис. 2.41,*b*), диэлектрической трубы 4 с якорем 10, измерительной аппаратуры, а также тяжелого полого снаряда 5 с лебедкой 1 и тросами 2, которые используются для размещения марок в грунте.

Принцип действия устройства заключается в бесконтактном определении деформаций грунта с помощью кольцевых марок, основанном на взаимодействии датчика (генератора высокой частоты) и коротко-замкнутого витка (кольцевой марки). Установка глубинных деформационных марок осуществляется следующим образом. В грунте под обсадными трубами 3 пробуривается скважина 8 до слоя, который обладает относительно высоким модулем деформации и может считаться недеформирующимся при ожидаемых нагрузках. Скважина заглубляется в этот слой на 1 м ниже обреза обсадной трубы. В скважину опус-

кается дизелектрическая трубка с закрепленным на ней якорем и реперной маркой 9 в виде тонкого металлического кольца, защищенного двумя наклеенными на трубку диэлектрическими муфтами.

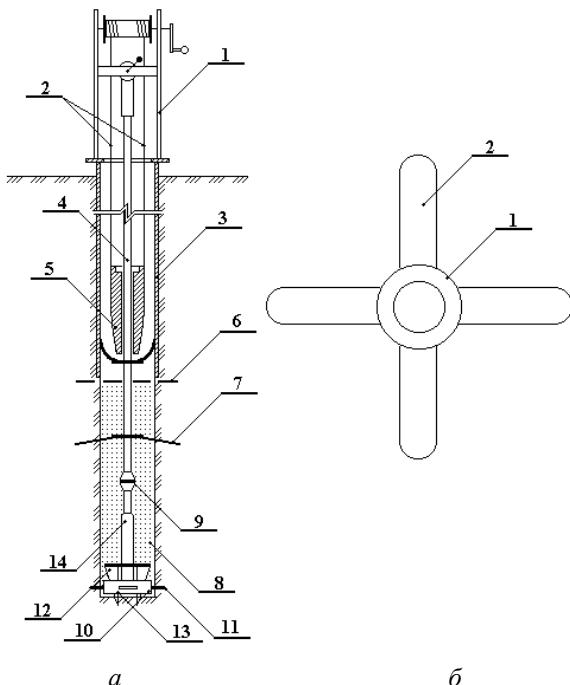


Рис. 2.40. Устройство для измерения послойных деформаций грунтов основания: а. схема установки деформационных марок: 1 – лебедка, 2 – тросы, 3 – обсадная труба, 4 – дизелектрическая трубка, 5 – полый снаряд, 6, 7 – деформационные марки, 8 – скважина, 9 – реперная марка, 10 – якорь, 11 – лопатки, 12 – блок клиньев, 13 – база якоря, 14 – штанга; б. деформационная марка: 1 – кольцо, 2 – лапки.

Якорь предназначен для анкеровки дизелектрической трубы на дне скважины. Он состоит из штанги 14, в которую на клею вставляется дизелектрическая трубка, стержня, размещенного внутри этой трубы и соединенного со штангой винтами, блока вертикальных клиньев 12, надетого на штангу, и базы 13, навинченной на нее. База имеет вертикальные и горизонтальные прорези. В горизонтальные прорези вставлены лопатки 11.

Когда якорь становится на дно скважины, в скважину опускается снаряд в виде полого тяжелого цилиндра и его ударами блок клиньев забивается в дно скважины через вертикальные прорези базы и при этом вдавливает лопатки в стенки скважины. Затем груз извлекается и

скважина тампонируется тиксотропным раствором бентонитовой глины до проектной отметки установки марки. Деформационная марка с согнутыми лапками вставляется в обсадную трубу и под весом снаряда опускается на проектную отметку. Выходя за обрез обсадной трубы, лапки распрямляются и врезаются в стенки скважины. Далее снаряд извлекается на дневную поверхность, а скважина заполняется тиксотропным раствором до следующей проектной отметки. До этой же отметки поднимаются обсадные трубы и устанавливается очередная марка.

Простейшая схема погружения марок при выполнении лапок из пружинной стали позволяет устанавливать деформационные марки на значительных глубинах (до нескольких десятков метров) с минимальными затратами времени и труда.

Для бесконтактного замера положения марок используется электронная схема, включающая стабилизатор напряжения, генератор высокочастотных сигналов и катушку (датчик). Частота и амплитуда колебаний определяются параметрами колебательного контура.

При приближении катушки к металлическому предмету меняется индуктивность катушки, вследствие чего меняется частота и амплитуда колебаний. По максимальному изменению любого из этих параметров определяется положение металлического предмета (кольцевой пружинной марки).

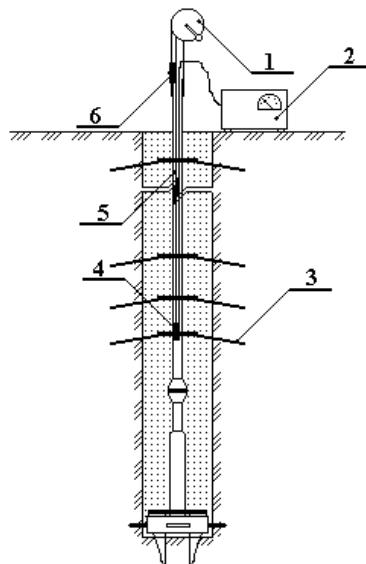


Рис. 2.41. Измерение послойных деформаций основания:
 1 – рулетка, 2 – вторичный прибор, 3 – деформационная марка,
 4 – датчик, 5 – мерная лента, 6 – нониус.

После установки марок приступают к измерению послойных деформаций основания. Для этого в диэлектрическую трубку опускают катушку генератора – закрепленный на мерной ленте датчик, выводы которого соединены с микровольтметром или частотомером (рис. 2.41). С помощью шкалы измерительного устройства, надеваемого на верхний конец трубы (см. рис. 2.41), определяют глубину погружения датчика. При прохождении датчика через кольцо марки в датчике наводится ток, меняющий индуктивность катушки, что приводит к изменению показаний вторичного прибора. При наибольшем изменении показаний вторичного прибора, свидетельствующем о том, что датчик расположен на уровне марки, берется отсчет по мерной ленте. Изменение положения марок во времени будет свидетельствовать о деформации грунтовой толщи.

Как показала практика, предложенная методика позволяет осуществлять длительные наблюдения за процессами деформирования мощной толщи грунтов природного сложения на различных глубинах с точностью ± 1 мм.

Комплексный полевой эксперимент проводился на полигонах Соружений защиты Санкт-Петербурга от наводнений совместно с кафедрой Подземных сооружений, оснований и фундаментов ЛПИ им. М.И. Калинина при содействии ЛенГЭСС и Геологической экспедиции №19 ЛО Гидропроект им. С.Я. Жука.

Экспериментальные полигоны представлены водонасыщенными суглинками и пылевато-глинистыми отложениями балтийского ледникового озера, которые подстилаются мореной лужской стадии валдайского оледенения. Верхние 4-5 м полигонов сложены насыпным песчаным грунтом средней крупности с включениями гравия (тело дамбы). Абсолютная отметка дневной поверхности составляет 0,8...1,2 м БС. Основание дамбы на участке полигона с отметки -3...-4 м БС до -16...-20 м БС сложено неяснослоистыми суглинками текучей (слой 24) и мягкопластичной (слой 24а) консистенции и ленточными суглинками текучей (слой 25) и мягкопластичной (слой 25а) консистенции с модулем деформации 4...8 МПа. Слои ленточных суглинков и глин обладают фильтрационной анизотропией с доминирующей горизонтальной проницаемостью. Ниже залегают слои переотложенной морены тугопластичной консистенции (слой 22), подстилаемые ледниковые суглинками полутвердой консистенции. Модуль деформации моренных суглинков составляет 15...18 МПа.

План полигона и геологические разрезы основания с размещением контрольно-измерительной аппаратуры приведены на рис. 2.42, 2.43.

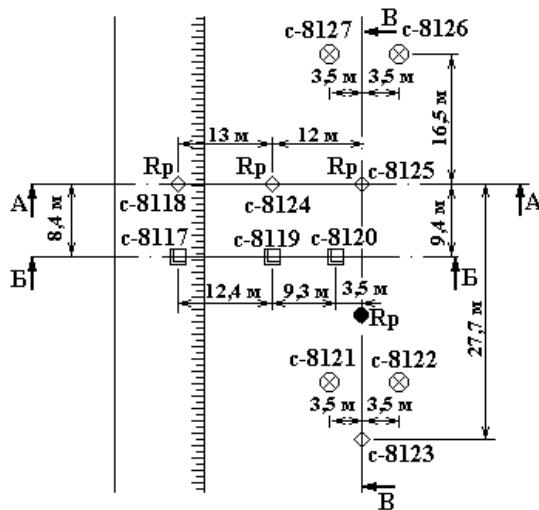


Рис. 2.42. План расположения контрольно-измерительной аппаратуры на экспериментальном полигоне:

◇ – скважины с деформационными марками (ЛИСИ),

□ – скважины с месседозами (ЛИСИ),

⊗ – скважины с датчиками порового давления (ЛПИ),

Rp – поверхностные геодезические марки (ЛенГЭСС).

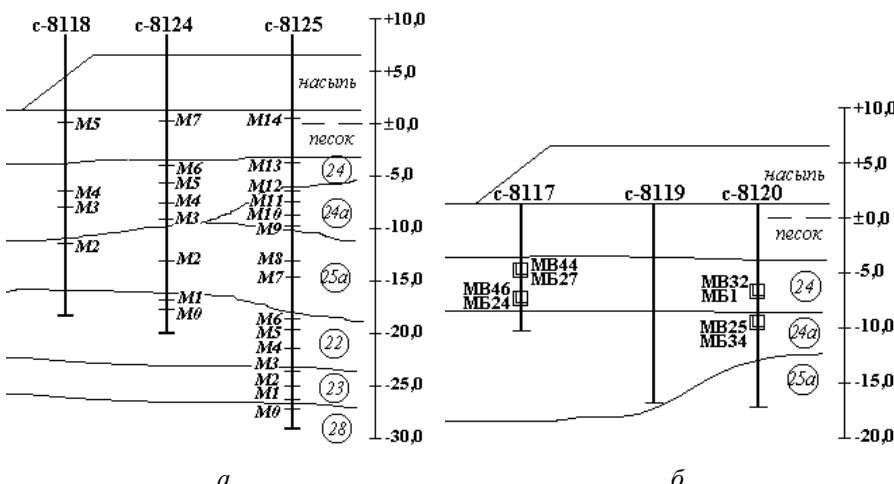


Рис. 2.43 (начало).

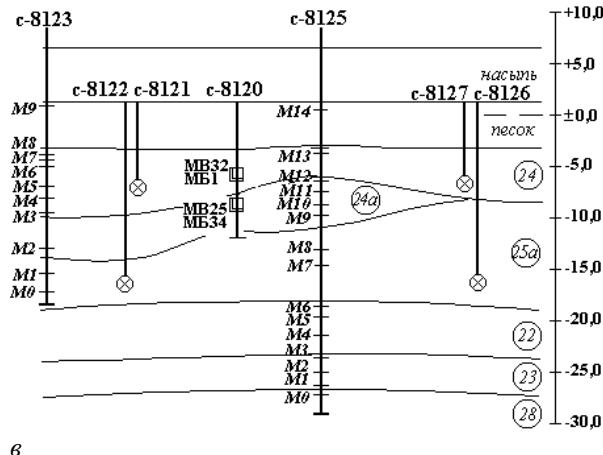


Рис. 2.43 (окончание).

Разрезы *a* – А-А, *б* – Б-Б, *в* – В-В экспериментального полигона.

Размеры полигона в плане составляют около 50×120 м. Наблюдения на полигоне велись после установки КИА с августа 1986 г. Нагрузка на полигоне создавалась песчаной насыпью в три этапа с июня по октябрь 1987 г. Всего было отсыпано около 40 тыс. m^3 песка, удельный вес которого в среднем составлял 14 kN/m^3 при коэффициенте пористости $e = 0,95$ (приведенные физические характеристики песка определены в лабораторных условиях).

Наблюдения показали, что наиболее интенсивный рост осадок наблюдается в процессе нагружения основания (рис. 2.44-2.47). По окончании отсыпки насыпи происходит выполнование графиков развития осадки во времени. Сравнивая кривые развития осадок, полученные по результатам геометрического нивелирования поверхностных марок, и кривые, полученные по результатам наблюдений за изменением расстояния между верхней и нижней (реперной) деформационными марками, отметим сходство картины деформирования. Некоторую разницу графиков можно объяснить тем, что поверхностные геодезические марки установлены на 1...2 м выше верхней деформационной марки на слой рыхлого песка. Совпадение в целом полученных по результатам двух видов измерений суммарных осадок поверхности позволяет сделать вывод о достоверности полученных по предлагаемой методике картин распределения послойных осадок по глубине сжимаемой толщи. Анализируя графики послойных осадок (рис. 2.48), заметим, что 25...40% начальных осадок приходится на слой песка, 50...70% – на слой 24, и лишь около 5% – на слой 25.

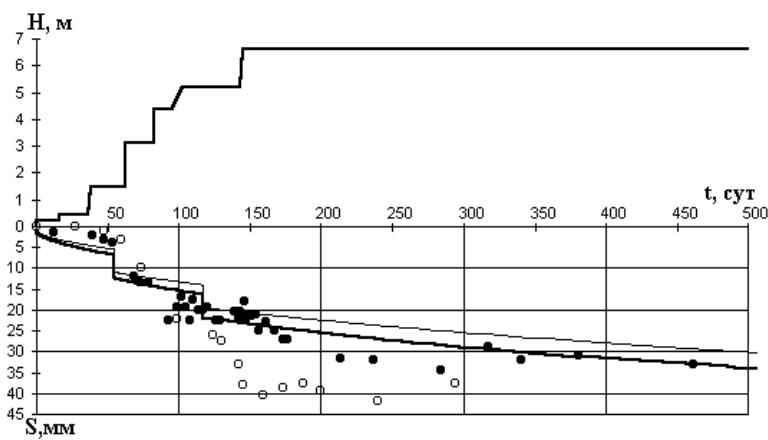


Рис. 2.44. График развития осадок по скважине с-8118:

- — по результатам измерения послойных деформаций;

- — по результатам геодезических измерений;

- — расчетная кривая без учета ползучести скелета грунта;

- — расчетная кривая с учетом ползучести скелета грунта.

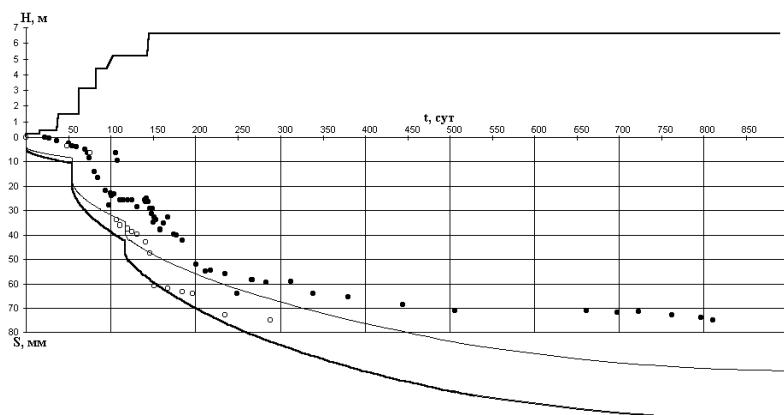


Рис. 2.45. График развития осадок по скважине с-8123

(см. экспликация на рис. 2.44).

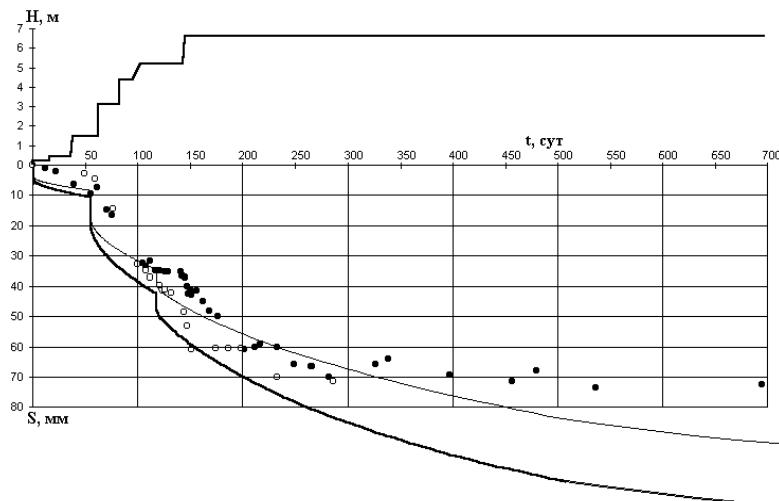


Рис. 2.46. График развития осадок по скважине с-8124
(см. экспликация на рис. 2.44).

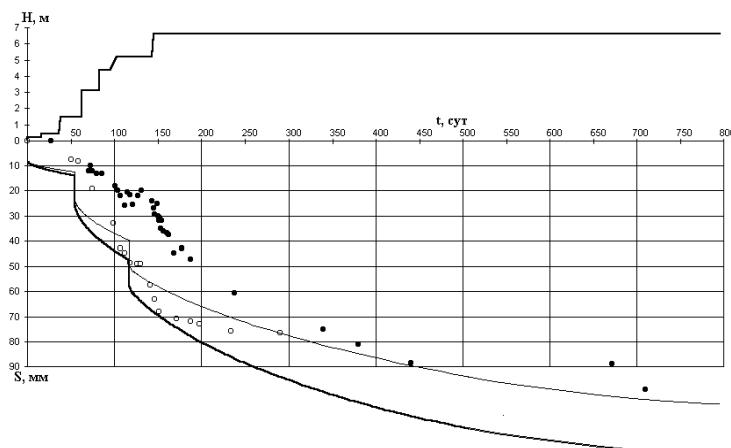


Рис. 2.47. График развития осадок по скважине с-8125
(см. экспликация на рис. 2.44).

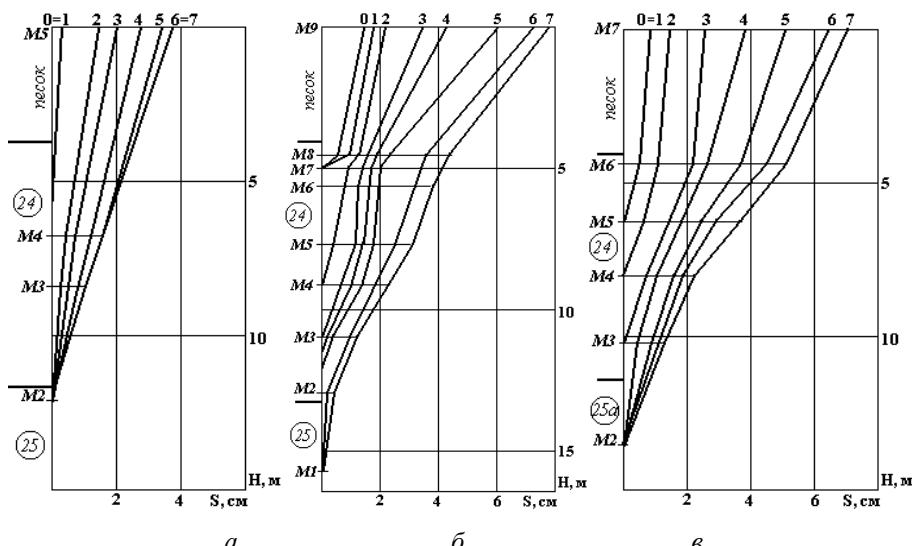


Рис. 2.48. Распределение послойных деформаций грунта в основании пригрузочной насыпи по скважине *a* – с-8118, *б* – с-8123, *в* – с-8124:

0 – на 15-е сутки (после отсыпки конусов первой очереди); 1 – на 38-е сутки (после отсыпки первой ступени нагрузки); 2 – на 64-е сутки (после отсыпки песчаных конусов второй очереди); 3 – на 87-е сутки (перед приложением второй ступени нагрузки); 4 – на 145-е сутки (перед приложением третьей ступени нагрузки); 5 – на 180-е сутки; 6 – на 223-е сутки; 7 – на 315-е сутки.

При наращивании пригрузочной насыпи глубина сжимаемой толщи увеличивалась и к моменту окончания нагружения составила около 15 м, причем основная доля осадок приходилась на грунты слоя №24.

Выполним оценку развития осадки поверхности грунта в случае учета ползучести скелета грунта и без учета ползучести. При ширине пригрузочной насыпи 50 м и средней суммарной мощности неянослоистых суглинков и ленточных суглинков и глин на полигоне около 13,2 м условия работы этих грунтов близки к условиям одномерной консолидации, т.е. к условиям, в которых выполнялись лабораторные испытания.

Расчетная схема для рассматриваемой задачи приведена на рис. 2.49. В расчетах мощность сжимаемой толщи принята равной 13,2 м, верхние 7,7 м которой сложены неянослоистыми суглинками, а нижние 5,5 м – ленточными суглинками и глинами. Дренаж осуществляется через верхнюю поверхность. Нагрузка на основание приведена к равномерно распределенной, прикладываемой в 4 этапа:

1 этап – прикладывается нагрузка $q=0,0602$ МПа от веса тела дамбы и рассматривается консолидация основания в течение 2 лет до начала

отсыпки пригрузочной насыпи;

2 этап – прикладывается нагрузка $q=0,014$ МПа от первого слоя пригрузочной насыпи и рассматривается консолидация основания в течение 49 суток до начала отсыпки второй очереди пригрузочной насыпи;

3 этап – прикладывается нагрузка $q=0,056$ МПа от второго слоя пригрузочной насыпи и рассматривается консолидация основания в течение 56 суток до начала отсыпки третьей очереди пригрузочной насыпи;

4 этап – прикладывается нагрузка $q=0,023$ МПа от третьего слоя пригрузочной насыпи и рассматривается консолидация основания в течение 200 лет.

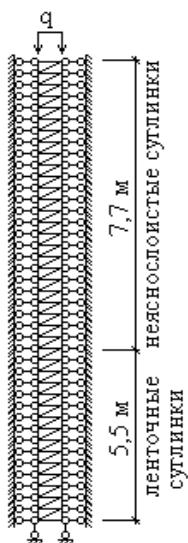


Рис. 2.49. Расчетная схема к оценке развития осадок основания экспериментального полигона.

Поскольку наблюдения за деформациями основания начаты перед отсыпкой пригрузочной насыпи и сведения о консолидационных процессах при отсыпке тела насыпи отсутствуют, результаты расчетов приводятся за вычетом деформаций, произошедших в течение первых двух лет нагружения основания.

Модуль деформации, по данным штамповых испытаний, для неяснослоистых суглинков составляет 4-8 МПа, для ленточных суглинков и глин – 6-8 МПа. По данным лабораторных исследований значение равновесного модуля деформации E_∞ составляет около 1,7 МПа для неяснослоистых суглинков и около 1,6 МПа для ленточных суглинков

и глин. Выполним сравнение расчета консолидационных процессов при деформационных характеристиках, полученным по результатам штамповочных и компрессионных испытаний.

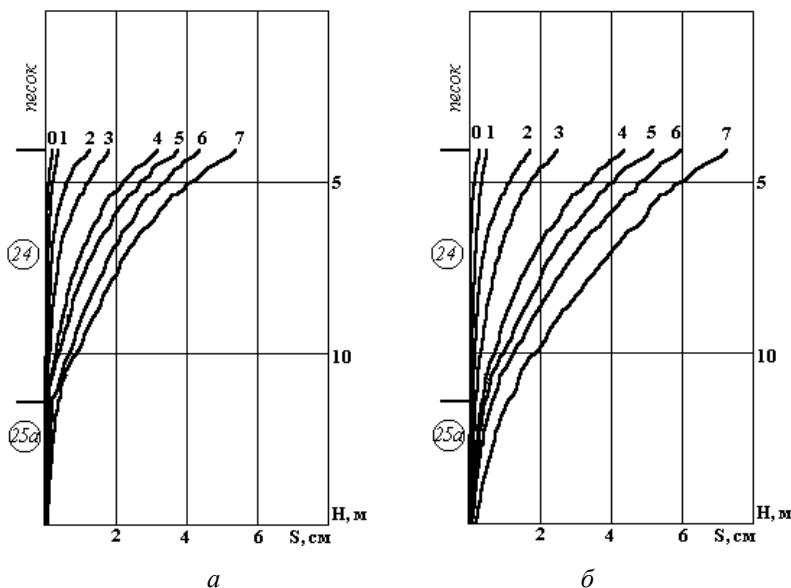


Рис. 2.50. Эпюры распределения перемещений по глубине по расчету в одномерных условиях консолидации (см. экспликация на рис. 2.48):
а – с учетом ползучести скелета грунта; б – без учета ползучести.

Среднее значение штамповочного модуля деформации для неянослоистых суглинков в пределах экспериментальной площадки составляет 7 МПа, а для ленточных суглинков и глин – 8 МПа. Мгновенные значения штамповочных модулей неизвестны. Примем соотношение мгновенных и равновесных штамповочных характеристик таким же, как и в лабораторных опытах. Для неянослоистых суглинков это соотношение равно $E_y/E_\infty=1,43$, отсюда $G_\infty=2,69$ МПа, $K_\infty=5,83$ МПа, $G_0=3,845$ МПа, $K_0=8,333$ МПа. Для ленточных суглинков и глин – $E_y/E_\infty=13,6$, отсюда $G_\infty=3,07$ МПа, $K_\infty=6,65$ МПа, $G_0=41,81$ МПа, $K_0=90,56$ МПа. Времена релаксации, коэффициенты фильтрации и коэффициенты начального порового давления примем в соответствии с результатами лабораторных испытаний.

На рис. 2.44-2.47 приведены расчетные кривые развития осадки поверхности полигона, полученные по результатам расчета с использованием штамповочных характеристик с учетом ползучести скелета грунта и начального коэффициента порового давления, не равного единице, и без учета ползучести по классической схеме расчета фильтрационной

консолидации. Для сравнения с экспериментальными данными к расчетной осадкам добавлены относительные осадки песчаного слоя дамбы, развивающиеся мгновенно, и принятые по эпюрам послойных деформаций (рис. 2.48).

Сравнение расчетных графиков развития осадок поверхности с экспериментальными данными показывает, что неучет вязких свойств грунта для рассматриваемых инженерно-геологических условий приводит к завышению расчетной скорости развития осадок, в то время как кривые, полученные по результатам расчета с учетом ползучести скелета грунта и неединичного начального коэффициента порового давления, на времена наблюдений достаточно хорошо коррелируют с экспериментальными кривыми. Максимальная разница наблюдавшихся на 700 сутки осадок и рассчитанных с учетом ползучести составила 21,9% по скважине С-8124, а максимальная разница наблюдавшихся на тот же момент времени осадок и рассчитанных без учета ползучести составила 62% по скважине С-8123 (табл. 2.3). Аналогичная разница заметна при сравнении расчетных эпюр послойных деформаций (рис. 2.50) с экспериментальными эпюрами (рис. 2.48).

Таблица 2.3

**Сравнение расчетных осадок основания полигона
с экспериментальными данными**

| № скважины | Осадка на 450-е сутки | | | | |
|-----------------------|--|----------------------------------|--|----------------------------------|--|
| | Эксперимен- тальное значение $S_{\text{эксп}}$, см | Расчет с учетом ползучести | | Расчет без учета ползучести | |
| | | Осадка $S_{\text{расч}}$, см | Относитель- ная разница Δ , % | Осадка $S_{\text{расч}}$, см | Относитель- ная разница Δ , % |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| C-8118 | 3,3 | 2,8 | 12,1 | 3,3 | 0 |
| C-8123 | 6,9 | 8 | 15,9 | 10,1 | 46,7 |
| C-8124 | 7,1 | 8 | 12,7 | 10,1 | 42,3 |
| C-8125 | 8,8 | 8,9 | 1,1 | 11,1 | 26 |
| Осадка на 700-е сутки | | | | | |
| C-8118 | - | - | - | - | - |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| C-8123 | 7,2 | 8,6 | 19,7 | 10,6 | 62 |
| C-8124 | 7,2 | 8,8 | 21,9 | 11,3 | 57,5 |
| C-8125 | 10 | 10,5 | 5 | 12,5 | 22,5 |

Сравнивая кривые развития осадок поверхности глинистого грунта, рассчитанные с учетом ползучести скелета и неединичного начального коэффициента порового давления по штамповым и компрессионным характеристикам, можно отметить, что на период наблюдений эти кривые практически совпадают (рис. 2.51,*a*). Однако, время окончания консолидационных процессов и конечные осадки для этих случаев существенно различны (рис. 2.51,*б*). Если по штамповым характеристикам расчетная равновесная осадка достигается через 20 лет и составляет около 14 см, то по компрессионным характеристикам расчетная равновесная осадка достигается через 70 лет и составляет около 48 см.

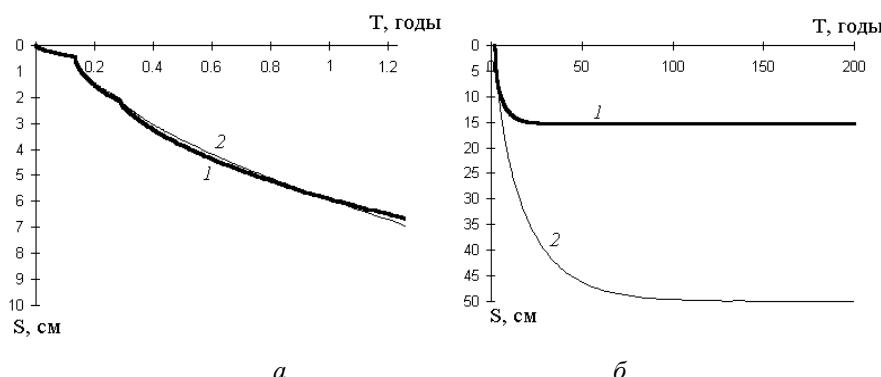


Рис. 2.51. Графики развития осадки поверхности грунта во времени (без учета сжатия песчаного слоя) с учетом ползучести скелета грунта и неединичного начального коэффициента порового давления: *а* – за период наблюдений в течение 450 сут, *б* – оценка развития осадок в течение 200 лет; 1 – расчет с использованием штамповых характеристик: для неяснослойистого суглинка $G_{\infty}=2,69$ МПа, $K_{\infty}=5,83$ МПа, $G_0=3,845$ МПа, $K_0=8,333$ МПа, $\theta=0,000437$ ч=1,6 с; для ленточного суглинка $G_{\infty}=3,07$ МПа, $K_{\infty}=6,65$ МПа, $G_0=41,81$ МПа, $K_0=90,56$ МПа, $\theta=0,000995$ ч=3,6 с; 2 – расчет по характеристикам, определенным в лабораторных условиях.

Если ползучесть скелета грунта не учитывается и начальный коэффициент порового давления принимается равным единице, то разница расчетных кривых развития осадок заметна уже на период наблюдений (рис. 2.52). Для рассматриваемых грунтовых условий консолидационные процессы заканчиваются в течение 10 лет, если расчет выполняется по штамповым характеристикам, и в течение 40 лет, если расчет выполняется по компрессионным характеристикам.

Последующие натурные эксперименты, проводившиеся под руководством канд. техн. наук., доцента А.В. Голли А.А. Кисляковым, А.Г. Шашкиным, А.А. Конусбаевым на полигонах №2 и №3 Сооружений защиты Санкт-Петербурга от наводнений в подобных инженерно-

геологических условиях и условиях нагружения, однако в отличие от рассматриваемого полигона дренированных вертикальными геодренами с шагом 2,1 м (полигон №2) и 3,6 м (полигон №3), показали следующее. Осадка поверхности полигона №2 на 380-е сутки с начала отсыпки пригрузочной насыпи составила около 45 см при суммарной осадке толщи глинистых грунтов 40 см. Осадка поверхности полигона №3 на 320-е сутки составила 42 см при суммарной осадке толщи глинистых грунтов 35 см. Таким образом, с экспериментальными данными лучше коррелируют результаты расчетов, выполненные по компрессионным характеристикам.

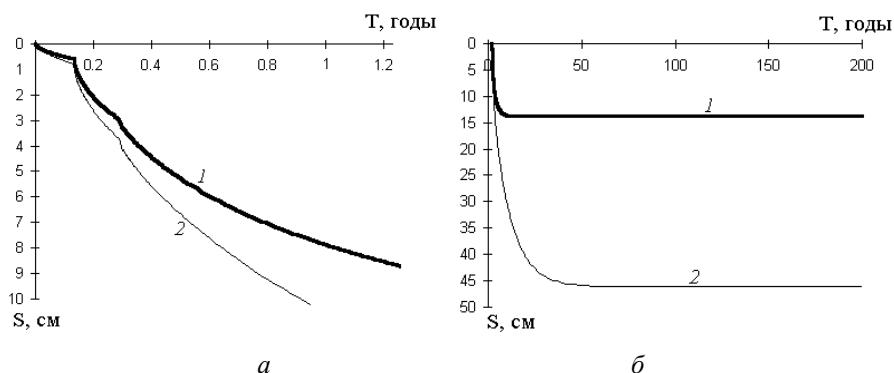


Рис. 2.52. Графики развития осадки поверхности грунта во времени без учета ползучести скелета грунта, при единичном начальном коэффициенте порового давления: *a* – за период наблюдений в течение 450 сут, *б* – оценка развития осадок в течение 200 лет; 1 – расчет с использованием штамповых: для неянослоистого суглинка $G_{\infty}=2,69$ МПа, $K_{\infty}=5,83$ МПа; для слоистого суглинка $G_{\infty}=3,07$ МПа, $K_{\infty}=6,65$ МПа; 2 – расчет по характеристикам, определенным в лабораторных условиях.

Несколько завышенные расчетные значения конечных осадок могут быть объяснены двумя основными причинами:

1. Между временем отбора образцов и началом лабораторных исследований происходило около суток, в течение которых гильзы с отобранным грунтом перевозились с полигона в лабораторию и хранились в эксикаторе. За это время неизбежны деформации разуплотнения грунта, величина которых неизвестна. В связи с этим полученные в лабораторных условиях компрессионные характеристики следует считать несколько заниженными.

2. Сравнение осадок по полигону №2 выполнено на 380 сутки, а по полигону №3 на 320 сутки наблюдений. Однако не имеется оснований считать, что наблюдавшаяся осадка является стабилизированной.

На основании сравнения результатов расчета процессов консолидации по штамповым и компрессионным характеристикам с экспериментальными данными можно утверждать, что для расчета конечных осадок следует принимать компрессионные характеристики, а штамповые характеристики являются условно равновесными, характеризующими деформации грунта только в течение времени проведения штамповых испытаний.

Выполним оценку учета эффектов ползучести скелета грунта и неединичного начального коэффициента порового давления при расчете осадок сооружений в центральной части Санкт-Петербурга, инженерно-геологические условия которой характеризуются наличием мощной толщи слабых глинистых грунтов, состав и происхождение которых, а, следовательно, и физико-механические характеристики, подобны рассмотренным. Оценим процессы развития осадки десяти- и двадцатиметровой толщи грунта, сложенного неяснослоистыми суглинками и ленточными суглинками и глинами. Расчеты выполнены с использованием механических характеристик, определенных для этих грунтов в лабораторных условиях. Результаты расчетов показаны на рис. 2.53-2.56 в виде графиков изменения степени суммарной консолидации во времени. Сравнительная оценка результатов расчетов приведена в табл. 2.4.

Таблица 2.4

**Оценка консолидационных процессов
в мощной толще глинистых грунтов**

| Методика расчета | Время окончания консолидационных процессов Т, лет | | | |
|---|---|----------------------------|-------------------------|----------------------------|
| | Мощность толщи 10 м | | Мощность толщи 20 м | |
| | неяснослоистые суглинки | ленточные суглинки и глины | неяснослоистые суглинки | ленточные суглинки и глины |
| Теория фильтрационной консолидации | 12 | 70 | 50 | 300 |
| Теория фильтрационной консолидации с учетом ползучести скелета грунта | 25 | 200 | 100 | 900 |

Согласно выполненным расчетам, при учете ползучести скелета грунта и неединичном начальном коэффициенте порового давления консолидационные процессы неяснослоистых суглинков замедляются примерно в два раза, а ленточных суглинков и глин – в три раза. Консолидация мощной толщи глинистого грунта происходит в течение десятилетий и даже столетий.

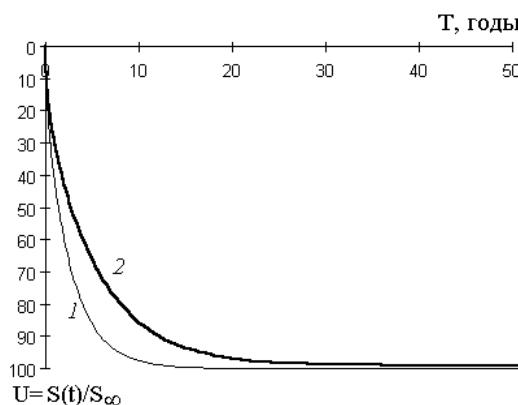


Рис. 2.53. Графики изменения степени консолидации во времени 10-метрового слоя неяснослоистых суглинков:
1 – без учета ползучести скелета грунта; 2 – с учетом ползучести и неединичного начального коэффициента порового давления.

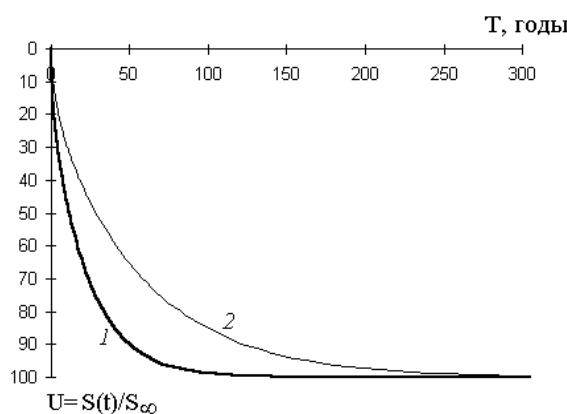


Рис. 2.54. Графики изменения степени консолидации во времени 10-метрового слоя ленточных суглинков и глин:
1 – без учета ползучести скелета грунта; 2 – с учетом ползучести и неединичного начального коэффициента порового давления.

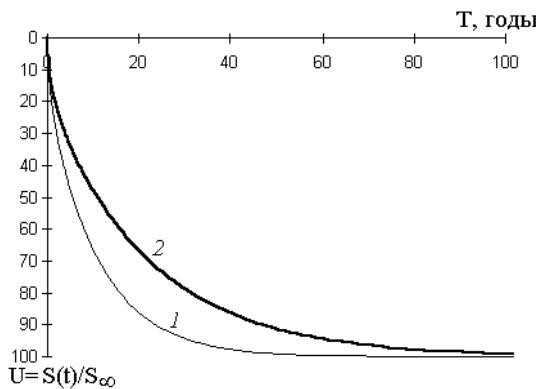


Рис. 2.55. Графики изменения степени консолидации во времени 20-метрового слоя неяснослоистых суглинков:
1 – без учета ползучести скелета грунта; 2 – с учетом ползучести и неединичного начального коэффициента порового давления.

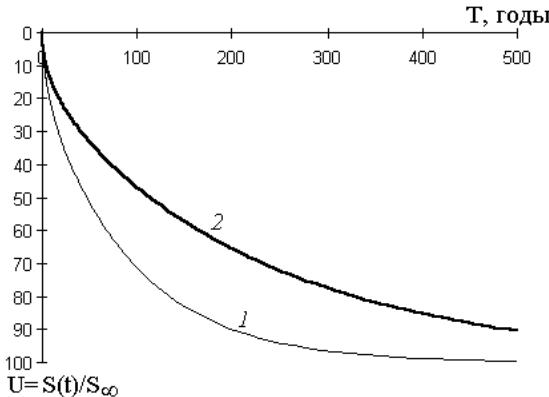


Рис 2.56. Графики изменения степени консолидации во времени 20-метрового слоя ленточных суглинков и глин:
1 – без учета ползучести скелета грунта; 2 – с учетом ползучести и неединичного начального коэффициента порового давления.

Это утверждение может быть подтверждено следующими фактами. Практически на всех обследованных автором работы исторических зданиях в центральной части Санкт-Петербурга, возведенных на фундаментах мелкого заложения, имеются характерные трещины осадочного происхождения. Очевидно, что осадки зданий в процессе эксплуатации определяются комплексом более сложных факторов, чем только уплотнение грунта в результате статического нагружения оснований.

вания весом сооружения. Тем не менее, факты развития длительных осадок уплотнения подтверждаются наличием трещин раскрытием от волосяного и более (исключая хаотические усадочные трещины) по штукатурному слою стен зданий, в которых производился капитальный либо косметический ремонт в течение ближайших десятилетия.

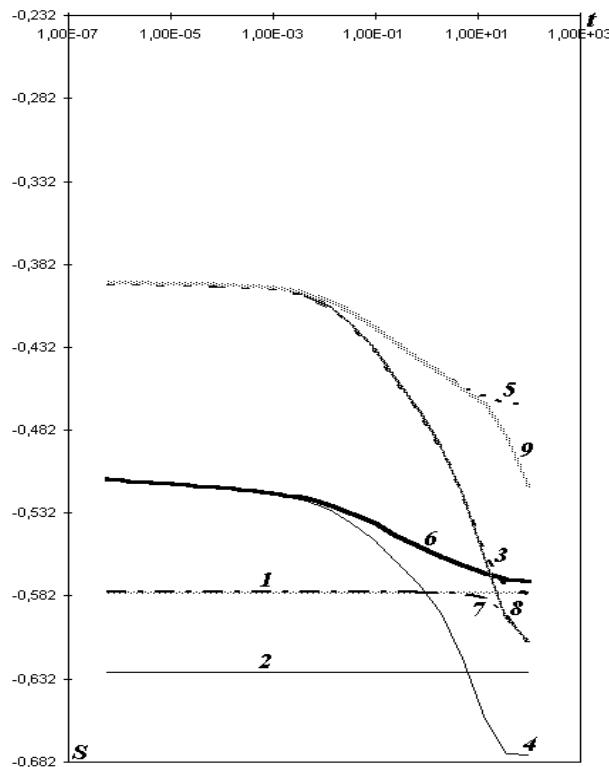
2.8. Численная оценка эффектов, возникающих в массиве грунта, работающего в условиях плоской деформации, при выполнении расчетов по различным моделям

Проанализируем эффекты, проявляющиеся при расчете нагружения основания полосовой нагрузкой с использованием ряда нелинейных моделей механики грунтов.

Пусть по поверхности однородного основания, находящегося в условиях плоской деформации, приложена абсолютно гибкая полосовая равномерно распределенная нагрузка. Расчетная схема задачи приведена на рис. 1.8. Для трехфазной среды по дневной поверхности предусмотрен свободный дренаж. Условные характеристики грунта приняты следующими $E=2,6$ МПа, $\nu=0,3$, $\gamma=0,02$ МН/м³, $k_x=k_y=1$ м/год, $n/K_w=0$, $c=0,05$ МПа, $\phi=15^\circ$.

Задача выполнена для следующих моделей грунта:

1. упругая среда Гука;
2. упругоидеально-пластическая среда Рейсса-Прандтля с предельной поверхностью Мора-Кулона и законом равнообъемного течения;
3. упруговязкопластическая модель Бингама-Шведова для тензорадевиатора напряжений;
4. модель фильтрационной консолидации Био-Флорина упругой среды;
5. фильтрационная консолидация упругоидеально-пластической среды;
6. фильтрационная консолидация упруговязкопластической среды;
7. фильтрационная консолидация упругой среды, характеризуемой начальным градиентом напора I_0 ;
8. фильтрационная консолидация упругоидеально-пластической среды, характеризуемой начальным градиентом напора I_0 ;
9. фильтрационная консолидация упруговязкопластической среды, характеризуемой начальным градиентом напора I_0 .



Прочностные характеристики среды подбирались для расчетов таким образом, чтобы внешнее давление было выше расчетного сопротивления грунта, но меньше предельного давления. Расчетная дополнительная осадка упругой среды составила $S=0,35$ м. Для принятых прочностных характеристик проявляются эффекты нелинейной работы грунта и расчетная осадка упругопластической среды составила $S=0,4$ м, т.е. выше, чем осадка упругой среды.

При расчете вязкопластического течения рассматривалась среда с упругой реакцией на гидростатическое нагружение и упруговязкопластической – на плоское девиаторное нагружение. Методика расчета такой среды принималась по рекомендациям А.Б. Фадеева (1987). В упруговязкопластической среде при мгновенном нагружении возникают мгновенные деформации, соответствующие деформациям упругой среды, а с течением времени они стремятся к деформациям, соответствующим деформациям упругопластической среды, со скоростью, определяемой временем релаксации (или вязкостью) среды.

Консолидационные процессы упругой среды характеризуются мгновенной осадкой, определяемой деформациями формоизменения и объемными деформациями грунта за счет сжатия газосодержащей жидкости. Для двухфазной среды (для которой выполнены дальнейшие расчеты) мгновенные деформации соответствуют получению упругого решения при коэффициенте Пуассона $\nu=0,5$, а сам процесс консолидации можно рассматривать как растянутое во времени изменение коэффициента Пуассона среды от 0,5 до реального значения в соответствии с граничными условиями дренажа. В рассматриваемом случае мгновенная осадка составила $S_0=0,16$ м, а конечная осадка S_∞ соответствует осадке однофазной упругой среды.

Расчет процесса консолидации упругопластической среды показывает, что пластические деформации накапливаются на первых интервалах времени, близких к $t=0$, поскольку грунт не успевает уплотниться от приложенных нагрузок. Кроме этого в некоторых областях под площадью нагружения развиваются растягивающие напряжения. В дальнейшем консолидация происходит только в упругой стадии. Этот вариант расчета наиболее невыгоден с точки зрения устойчивости грунтов в основании. Мгновенная осадка в данном случае составила $S_0=0,27$ м, конечная – $S_\infty = 0,45$ м, т.е. выше, чем осадка однофазной упругопластической среды. Заметим, что параметры прочности грунта определяются по результатам консолидированно-дренированных испытаний, уравнения пластического течения составлены для скелета грунта, поэтому поровое давление для такой модели интерпретируется не как фактор, разгружающий среду, а как индикатор степени уплотнения грунта. Следует отметить, что начальные давления в поровой

воде за счет перераспределения тотальных напряжений в упругопластических решениях, соответственно, перераспределяются, и максимальное поровое давление оказывается меньшим по сравнению с упругими и вязкопластическими моделями консолидации.

На рис. 2.58 показано распределение поровых давлений в основании по оси нагрузочной площади на момент времени $t=0^+$.

Консолидация двухфазной упруговязкопластической среды характеризуется мгновенной деформацией, определяемой упругими деформациями формоизменения. Во времени одновременно протекает два конкурирующих процесса: уплотнения и вязкопластического течения. Поскольку уплотнение вызывает повышение во времени сопротивления среды сдвигу, то решение будет занимать промежуточное положение между решениями задач фильтрационной консолидации упругой и упругоидеально-пластической среды, а результаты будут определяться соотношением прочностных, вязких и фильтрационных свойств грунта. Осадка двухфазной упруговязкопластической среды на момент времени $t=100$ лет составила $S=0,39$ м, хотя и не достигла еще стабилизированного значения.

В задачах консолидации с учетом начального градиента напора принималось $I_0=0,5$. При учете начального градиента в грунте образуется так называемая «мертвая зона», из которой не происходит отжатия воды и в которой отсутствуют деформации уплотнения. В остальной области грунт уплотняется частично, кроме этого здесь происходит замедление процесса отжатия воды, поскольку секущий коэффициент фильтрации K_s всегда меньше касательного K_f . Понятно, что для упругой среды в таком случае стабилизированная осадка окажется меньше, чем при $I_0=0$ (при $t=100$ лет осадка составила $S=0,24$ м).

Мгновенная осадка для двухфазной упругопластической среды, имеющей ненулевой начальный градиент напора, та же, что и при нулевом начальном градиенте, а прирост осадки оказывается меньше, чем в упругом решении (при $t=100$ лет $S=0,24$ м; прирост осадки за 100 лет по упругому решению равен $0,24-0,16=0,08$ м, а по упругопластическому – $0,34-0,27=0,07$). Этот эффект также объясняется перераспределением напряжений в грунте за счет пластических деформаций и, следовательно, сглаживанием распределения поровых давлений, что приводит к снижению градиентов фильтрации. Остаточные поровые давления по упругопластическому среды, также как и начальные, оказываются ниже, чем по варианту расчета консолидации упругой среды (рис. 2.59).

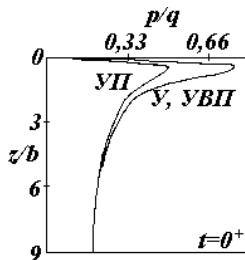


Рис. 2.58. Эпюры поровых давлений по оси приложения нагрузки в начальный момент времени.

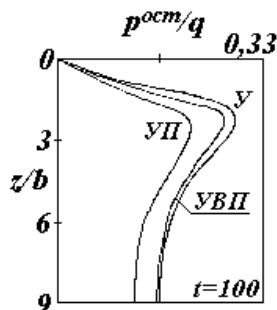


Рис. 2.59. Эпюры поровых давлений по оси приложения нагрузки в момент времени $t = 100$ лет.

График развития осадки и значения остаточных поровых давлений при решении задачи фильтрационной консолидации упруговязкопластической среды с ненулевым начальным градиентом напора занимают промежуточное положение между предыдущими двумя решениями. Конечная величина осадки может быть и выше и ниже, чем в модели фильтрационной консолидации упруговязкопластической среды с нулевым начальным градиентом напора. В этом случае в конкуренцию соотношений прочностных параметров и скоростей течения и уплотнения грунта включаются деформационные свойства среды.

Анализ результатов расчетов с использованием различных моделей среды свидетельствует о том, что при реализации задач фильтрационной консолидации в пространственных (плоских) условиях в начальный момент времени основание получает мгновенные перемещения, обусловленные упругими или упруго-пластическими деформациями формоизменения. В вязкопластических задачах мгновенные смещения определяются упругими объемными и сдвиговыми деформациями (без учета фильтрации) или упругими деформациями формоизменения (с учетом фильтрации). Мгновенное деформирование является не более

чем математической абстракцией, используемой в тех случаях, когда пренебрежение фактором времени не сказывается на точности решения задачи для последующих моментов времени.

Для исключения этой мгновенности деформаций в расчетах обычно поступают следующим образом:

- а. заменяют объемные условия консолидации одномерными (компрессионными),
- б. нагрузку на основание прикладывают не мгновенно, а с некоторой скоростью,
- в. учитывают вязкоупругий характер деформаций (сдвига и/или объема),
- г. учитывают пластический характер деформаций объема.

Рассмотрим недостатки указанных вариантов. Понятно, что при реализации одномерных задач деформация основания по поверхности одинаковая, смещения массива грунта в сторону отсутствуют. При учете скорости нагружения к концу этапа приложения нагрузки деформации формоизменения все равно будут реализованы полностью. При учете вязкого характера упругих деформаций сдвига эти деформации будут реализованы полностью независимо от дренирующих условий, чего не наблюдается в натурных экспериментах.

При реализации задач о напряженно-деформированном состоянии сплошных сред пользуются моделями, включающими в себя элемент Гука, параметрами которого являются модуль объемной сжимаемости K , модуль сдвига G и/или модуль упругости E , которые связаны между собой коэффициентом Пуассона. Модуль E в механике грунтов в отличие от модуля упругости включает в себя остаточные деформации, и называется модулем деформации. Поэтому наиболее удачными следуют, видимо, считать модели, в которых упругие константы определяются по разгрузочным графикам, а объемная компонента деформаций включает в себя как упругую, так и пластическую составляющие (например, модель грунта Cam-Clay, модель кусочно-гладкой поверхности нагружения Зарецкого и др.). Поскольку E_k на порядок выше E , эти деформации незначительны и хорошо коррелируют со скоростью нагружения основания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бронин В.Н.** К вопросу учета изменения коэффициентов фильтрации и сжимаемости при одномерной консолидации торфяных грунтов //Изв. вузов: Строительство и архитектура. – М., 1977. №2. – с. 102–106.
2. **Бугров А.К.** Метод конечных элементов в расчетах консолидации водонасыщенных грунтов. //Гидротехническое строительство. 1975. №7. – с. 35–38.
3. **Бугров А.К., Голубев А.И.** Упруго-пластическая модель консолидирующегося водонасыщенного грунта. /Тез. докл. науч.-техн. конф. //Системы автоматизированного проектирования фундаментов и оснований. – Челябинск, 1988. – с. 23–24.
4. **Веригин Н.Н.** Консолидация грунтов под гибким штампом. //Основания, фундаменты и механика грунтов, №5, 1961. – с. 20–22.
5. **Веригин Н.Н.** Консолидация водонасыщенного грунта при действии внешней нагрузки, нормальной к границе полупространства. – В кн.: Доклады к VI Международному конгрессу по механике грунтов и фундаментостроению. М., 1965. – с. 26–31.
6. **Вялов С.С.** Реологические основы механики грунтов: Учеб. пособие для строительных вузов. – М.: Высш. школа, 1978. – 447 с.
7. **Герсеванов Н.М.** Основы динамики грунтовой массы. – М.: ОНТИ, 1937. – 241 с.
8. **Герсеванов Н.М.** Собрание сочинений, т. 2. – М.: Стройиздат, 1948. – 375 с.
9. **Голли О.Р.** Исследование влияния гидростатического давления на строительные свойства слабых глинистых грунтов. – Автореф. дис... канд. техн. наук. Л., 1975.
10. **Гольдин А.Л., Троицкий А.П., Эйслер Л.А.** Расчет напряжений и смещений земляной плотины с учетом нелинейной связи между напряжениями и деформациями в грунте. – Известия ВНИИГ, т. 104, Л., 1974. – с. 191–195.
11. **Горелик Л.В.** Расчеты консолидации оснований и плотин из грунтовых материалов. – Л.: Энергия, 1975. – 154 с.
12. **Зарецкий Ю.К.** Теория консолидации грунтов. – Изд-во «Наука». М., 1967. – 271 с.
13. **Зарецкий Ю.К.** Консолидация торфяного основания //Основания, фундаменты и механика грунтов. 1970. №1. – с. 12–15.
14. **Зарецкий Ю.К.** Вопросы консолидации слабых водонасыщенных грунтов. Материалы Всесоюзного совещания «Проблемы строительства на

- слабых грунтах», Рижский политехнический институт, Рига, 1972. – с. 51–64.
15. **Зарецкий Ю.К.** Современные методы расчета слабых водонасыщенных грунтов. Генеральный доклад на VII Дунайско-Европейской конференции по механике грунтов и фундаментостроению. т. 3, Кишинев, сентябрь, 1983. – с. 103–121.
 16. **Зарецкий Ю.К.** Вязкопластичность грунтов и расчеты сооружений. М.: Стройиздат, 1988 – 352 с.
 17. **Ляпичев Ю.П., Айабака Эдгар Х.** К совместному расчету фильтрационной консолидации ядра и напряженно-деформированного состояния каменно-земляной плотины методом конечных элементов. – Русловые процессы и вопросы гидротехники. М., 1982. – с. 126–136.
 18. **Мельников А.В.** Прогноз деформаций основания, сложенного отсыпаным в воду комковатым моренным суглинком. Автореф. дисс...канд. техн. наук. Л., 1986.
 19. **Олимпиев Д.И., Зарецкий Ю.К., Ломбардо В.Н., Грошев М.Е.** Алгоритмы расчета водонасыщенных грунтов. – Известия ВНИИГ: сб. науч. тр., 1979, т. 130. – с. 26–34.
 20. **Соболевский Ю. А., Соболевский С. В.** Начальные условия для задач устойчивости и консолидации слабых водонасыщенных оснований от действия полосовой нагрузки. II Балтийская конференция по механике грунтов и фундаментостроению. Строительство на торфах и деформации сооружений на сильноожимаемых грунтах, 1988, т. 4. – с. 105–112.
 21. **Тер-Мартirosян З.Г., Демин И.И., Демина Е.А.** Задачи влагопроводности при неполном водонасыщении. – ДАН СССР, 1983, т. 272, №31
 22. **Флорин В.А.** К вопросу о гидродинамических напряжениях в грунтовой массе. – Л.: ГОНТИ, 1938. – 54 с.
 23. **Флорин В.А.** Теория уплотнения земляных масс. – М.: Стройиздат, 1948. – 248 с.
 24. **Флорин В.А.** Основы механики грунтов. т. II, Госстройиздат, М.-Л., 1961. – 544 с.
 25. **Цытович Н.А.** Механика грунтов. – М., Госстройиздат, 1963.– 636с.
 26. **Цытович Н.А. Тер-Мартirosян З.Г.** Основы прикладной геомеханики в строительстве: Учеб. пособие. – М.: Вышш. школа, 1981. – 317 с.
 27. **Шулятьев О.А.** Изменение во времени напряженно-деформированного состояния глинистых грунтов при фильтрационной анизотропии под действием полосовой нагрузки. – Автореф. дисс... канд. техн. наук. Л., 1983.
 28. **Barron R.** Consolidation of Fine Grained Soils by Drain Well. Trans. Amer. Soc. Civil Eng. 4s., 1948. – p. 113.
 29. **Biot M.** General Theory of Three Dimensional Consolidation. J. of Applied Physics, Vol. 12, February, 1941. – pp. 155–164.
 30. **Biot M.** Consolidation Settlement under a Rectangular Load Distribution. J. of Applied Physics, Vol. 12, May, 1941. – pp. 426-430.

31. **Biot M.** General Solution of the Equations of Elasticity and Consolidation for a Porous Material. J. of Applied Mechanics. ASMFE, March, 1956. – pp. 91–96.
32. **Biot M., Clingan F.M.** Consolidation Settlement of a Soil with Impervious Top Surface. J. of Applied Physics, Vol. 13, July, 1941. – pp. 578–581.
33. **Booker J.K., Small I.S.** Investigation of the Stability of Consolidation. Int J. of Solid and Structures, Vol. 11, 1975. – pp. 907–917.
34. **Chang C.S., Duncan I.M.** Consolidation Analysis for Partly Saturated Clay by Using an Elastic-Plastic Effective Stress-Strain Model. Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. Vol. 7, 1983. – pp. 39–55.
35. **Gibson R.E., Namee G.** The Consolidation Settlement of a Load Uniformly Distributed over a Rectangular Area. – In. Proc. 4th Int. Conf. Soil Mech. London, Vol.1, 1963. – pp. 297–299.
36. **Hwang C.T., Morgenstern N.R., Murray D.W.** On Solution of Plain Strain Consolidation Problems by Finite Element Method. Can. Geotech. J., Vol. 109, 1971. – pp. 109–118.
37. **Rendulic L.** Porenziffer und Porenwasserdruck in Tonen. Bauingenier, 17, 1936. – 559 c.
38. **Schiffman R.L., Chean A. T.-F.** An Analysis of Consolidation Theories. J. of Soil Mechanics and Foundations. Div. ASCE, Vol. 95, 1969. – pp. 285–312.

3

ПАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ГРУНТОВОГО МАССИВА С УЧЕТОМ ДЕЙСТВИЯ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ СИЛ

3.1. Задачи фильтрации в механике грунтов

Современными нормами и правилами в процессе проектирования требуется определение параметров фильтрации в теле грунтовой плотины и ее оснований, а именно:

- а) построение гидродинамической сетки движения фильтрационного потока, в том числе депрессионной поверхности (в плоской задаче – депрессионной кривой), являющейся верхней границей фильтрационного потока в теле плотины;
- б) определение параметров фильтрационного потока – скоростей фильтрации и градиентов.

Расчет фильтрационного потока и оценка влияния изменения фильтрационного режима на напряженно-деформированное состояние массива грунта актуален при выполнении мероприятий по водопонижению в котловане рядом с существующей застройкой. При разработке глубоких котлованов в условиях высокого уровня грунтовых вод производится водопонижение, приводящее к изменению положения уровня грунтовых вод и провоцирующее развитие деформаций уплотнения массива грунта, что необходимо учитывать при проектировании мероприятий по водопонижению рядом с существующими зданиями. Кроме этого водопонижение вызывает движение грунтовых вод в пределах депрессионной воронки, которое при определенных скоростях фильтрации приводит с развитием супфозионных процессов, т.е. к выносу частиц различных фракций из грунта, и, соответственно, к увеличению сжимаемости грунта.

Расчет фильтрационного потока особенно сложен в силу некоторой неопределенности граничных условий и фильтрационной анизотропности свойств грунта (Гольдин А.Л., Рассказов Л.Н., 1987). Фильтрация воды в основании является безнапорной, так как имеет место свободная поверхность фильтрационного потока (депрессионная кривая). В большинстве практических случаев фильтрационных расчетов рассматривается установившаяся фильтрация, для описания которой ис-

пользуется уравнение Лапласа. При сложной геометрии расчетной области такое решение возможно только численными методами.

Метод конечноэлементного решения задач о безнапорной фильтрации предлагался в работах О. Зенкевича (1975), Дж. Коннора и К. Бреббия (1979), А.Б. Фадеева и А.Л. Прегера (1994). Сущность этих методов заключается в перестроении сети конечных элементов в процессе нахождения депрессионной поверхности таким образом, чтобы вся расчетная схема располагалась ниже поверхности свободного потока. Такая процедура обладает двумя недостатками. Во-первых, процедура перестроения сети конечных элементов весьма трудоемка и при сложной геометрии расчетной схемы требует разработки специальных приемов. Во-вторых, поскольку из расчетной схемы исключаются элементы выше депрессионной кривой, такая схема расчета не позволяет проводить дальнейшего анализа изменения напряженно-деформированного состояния массива грунта от действия фильтрационного потока.

Решение задач о безнапорной фильтрации рассматривалось, в основном, в работах по гидротехническому строительству. В работе Л. Н. Рассказова и др. (1989) рассмотрено конечно-элементное решение задачи безнапорной фильтрации в плоских и пространственных условиях с использованием нелинейного закона фильтрации $v = k_\phi I^2$ и приводятся тестовые примеры для простых условий, имеющих аналитическое решение. В работе Л.Г. Бабаяна (1992) приводится конечно-элементное решение задачи о безнапорной фильтрации и совместный статический расчет системы «бетонная плотина – скальное основание» с использованием упругой модели грунта. Нестационарная задача безнапорной фильтрации в гидротехнических сооружениях в плоских условиях рассматривалась М.Г. Пашковым и Ф.И. Шешуковой (1987).

Движение воды сквозь массив грунта оказывает влияние на изменение напряженно-деформированного состояния грунта. Движущаяся жидкость оказывает на скелет грунта гидравлическое воздействие, которое для элементарного объема представляет результирующую силу, складывающуюся из элементарной силы давления воды на частицы грунта и элементарной силы трения, которая определяется через градиент скорости и вязкость воды (Гольдин А.Л., Рассказов Л.Н., 1987).

В практике расчетов изменение напряженно-деформированного состояния массива грунта при снижении уровня грунтовых вод сводится к расчету уплотнения грунта вследствие увеличения удельного веса грунта, с которого снимается взвешивающее действие воды (Н.А. Цытович, З.Г. Тер-Мартиросян, 1983). Такой подход справедлив при равномерном изменении положения уровня грунтовых вод, когда исключены фильтрационные силы, возникающие при движении воды.

С целью определения параметров фильтрационного потока (положения депрессионной кривой и скоростей фильтрации воды через массив грунта), при неоднородном изменении положения грунтовых вод и сложной геометрии расчетной схемы, а также с целью оценки влияния фильтрационных сил на изменение напряженно-деформированного состояния грунта предлагается метод совместного конечно-элементного решения задачи об безнапорной фильтрации и напряжено-деформированного состояния массива грунта.

3.2. Расчет фильтрационного потока в основании сооружений

Фильтрация воды в основании является безнапорной, так как имеет место свободная поверхность фильтрационного потока (депрессионная кривая). В большинстве случаев фильтрационных расчетов рассматривается установившаяся фильтрация. Для установившегося движения воды в грунтах справедливо уравнение Бернулли:

$$\frac{p}{\gamma_w} + y + \frac{v^2}{2g} = const \quad (3.1)$$

где p – давление в поровой воде;

γ_w – удельный вес воды;

y – геометрическая высота над плоскостью сравнения;

v – скорость движения жидкости;

g – ускорение свободного падения.

Отношение $\frac{p}{\gamma_w}$ называется пьезометрической высотой, $\frac{v^2}{2g}$ – скоп-

ростным напором. В глинах, суглинках, супесях, песках и мелкотрещиноватой скале движение воды имеет ламинарный характер с малыми скоростями, поэтому обычно последним слагаемым пренебрегают.

Величина $\frac{p}{\gamma_w} + y$ называется пьезометрическим напором, или просто

напором.

Рассмотрим задачу установившейся фильтрации воды через пористую среду (грунт) в плоских условиях. Среда характеризуется постоянными коэффициентами фильтрации k_x и k_y , соответственно, в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Квазигармоническое уравнение Лапласа, описывающее такую задачу, имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0, \quad (3.2)$$

или, при постоянных коэффициентах фильтрации $k_x=const$, $k_y=const$:

$$k_x \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k_y \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \quad (3.3)$$

Интегрирование уравнения Лапласа при соответствующих граничных условиях определяет напор H в каждой точке рассматриваемой области фильтрации.

Рассмотрим граничные условия в задаче о свободной фильтрации через тело грунтовой плотины (рис. 3.1).

1. На водопроницаемых границах: верхнего бьефа KLA напор $H=H_e=const$; нижнего бьефа CDE напор $H=H_n=const$;

2. На водонепроницаемых участках GF границы с водоупором:

$$k_x \frac{\partial H}{\partial x} \cdot l_x + k_y \frac{\partial H}{\partial y} \cdot l_y = 0 \quad (3.4)$$

где l_x и l_y – направляющие косинусы внешней нормали к граничной поверхности;

3. На кривой депрессии AB напор равен вертикальным координатам точек кривой $H=y$. Поскольку линия AB есть линия тока, то для нее имеет место дополнительное условие (4).

4. На участке высачивания BC давление равно атмосферному и, следовательно, $H=y$.

Водопонижение при осушении котлована, устраиваемого около существующих зданий, обычно осуществляется при устройстве противофильтрационной завесы либо шпунтового ограждения. В задаче о фильтрации через основание сооружения граничными условиями будут следующие (рис. 3.2):

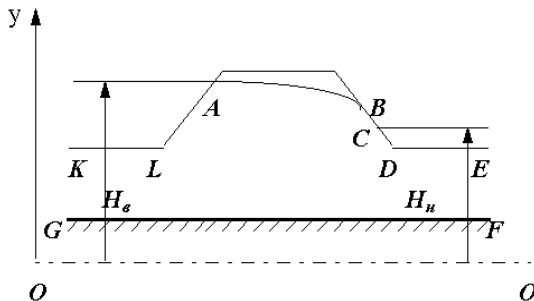


Рис. 3.1. Граничные условия в задаче о безнапорной фильтрации через грунтовую плотину.

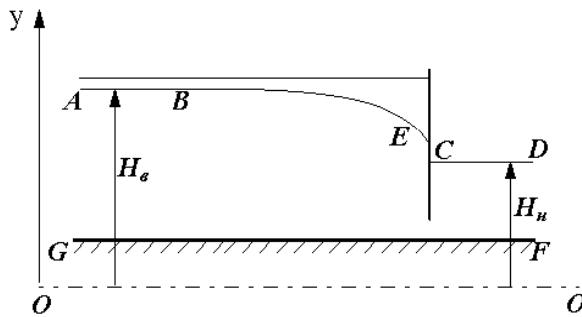


Рис. 3.2. Граничные условия в задаче о безнапорной фильтрации через грунтовую плотину.

1. На участке AB , находящемся за пределами зоны влияния осушения напор соответствует существующему природному уровню грунтовых вод $H=H_s=\text{const}$;
2. На участке CD напор соответствует отметке дна котлована $H=H_n=\text{const}$;
3. На водонепроницаемой границе с водоупором GF и на кривой депрессии BE имеет место условие (4).

Положение кривой депрессии в рассматриваемых задачах априори неизвестно и ее определение является одной из основных задач фильтрационного расчета.

При оценке влияния фильтрационных потоков на напряженно-деформированное состояние массива грунта конечноэлементное решение задачи о безнапорной фильтрации воды через грунт предлагается выполнять итерационным методом, проверяя на каждом шаге итераций условие (рис. 3.3):

$$H_c < y_c,$$

где H_c – напор в центре элемента;

y_c – вертикальная координата центра элемента.

При аппроксимации поверхности напоров треугольными элементами напор и вертикальная координата в центре элемента равны:

$$H_c = (H_i + H_j + H_k)/3;$$

$$y_c = (y_i + y_j + y_k)/3,$$

где i, j, k – номера узлов, окружающих элемент.

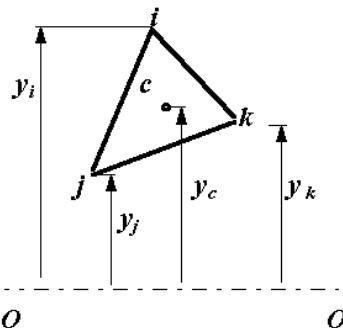


Рис. 3.3. Принцип получения поверхности свободного потока.

Если в центре элементе вычисленный напор превышает вертикальную координату элемента $H_c > y_c$, то есть элемент должен находиться выше кривой депрессии, то элемент можно исключить из расчетной сети элементов и откорректировать на данном цикле итераций координаты у ближайших к кривой депрессии узлов в соответствии с условием $H_c = y_c$ (О. Зенкевич, 1975, А.Б. Фадеев, А.Л. Прегер, 1994). Если элементы выше кривой депрессии необходимы для дальнейших расчетов напряженно-деформированного состояния, то, согласно условию (3.4), можно задать им фиктивное свойство непроницаемости введением малого коэффициента фильтрации k_0 , например в 100 раз меньше, чем самый малый коэффициент фильтрации грунтов рассматриваемой задачи. Расчеты показывают, что сходимость итерационного процесса при таком подходе к решению задачи достаточно быстрая, и, как правило, не превышает 4-5 итераций.

Определяющая система уравнений МКЭ установившейся фильтрации для плоских условий имеет вид (А.Б. Фадеев, 1987):

$$[K^c] \{H\} = 0, \quad (3.5)$$

где $[K^c] = \sum [K^e]$ – матрица жесткости системы;

$\{H\}$ – вектор узловых напоров;

$[K^e] = \Delta [B]^T [K_\phi] [B]$ – матрица жесткости элемента;

$[B]$ – матрица производных функций формы.

Анализ потоков через тело и основание плотины, очевидно, удобнее всего выполнять в скоростях фильтрации, поскольку вектор скорости соосен с направлением фильтрации в элементе. Кроме этого, по скоростям (или градиентам фильтрации) выполняется оценка фильтрационной прочности грунтов – суффозия, контактный выпор, контактный размыв.

Проекции скорости фильтрации в элементе на оси x и y равны

$$v_x = k_x \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = k_x \cdot \left(H_i \frac{\partial N_i}{\partial x} + H_j \frac{\partial N_j}{\partial x} + H_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right);$$

$$v_y = k_y \cdot \frac{\partial H}{\partial y} = k_y \cdot \left(H_i \frac{\partial N_i}{\partial y} + H_j \frac{\partial N_j}{\partial y} + H_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right),$$

или в матричной форме:

$$\{v\} = \begin{pmatrix} v_x & v_y \end{pmatrix}^T = [D][B][H].$$

Алгоритм решения задачи безнапорной фильтрации по предлагающей схеме имеет следующий вид (предполагается дискретное изменение уровня воды в бьефе):

1. Ввод информации о геометрии сети конечных элементов, свойствах элементов.
2. Выбор минимального коэффициента фильтрации k_{min} из заданных по всем элементам и назначение условия непроницаемости элемента $k_0 = k_{min}/100$.

Цикл по числу решаемых задач

3. Для всех элементов задается признак проницаемости $P(i)=0$, $i=1, M$, где M – число элементов.
4. Ввод заданных узловых напоров H_e и H_n .
5. Формирование матрицы жесткости системы $[K^c]$. (Для элемента с признаком $P(i)=1$ задается $k_x = k_y = k_0$).
6. Решение системы уравнений (5). Вычисление узловых напоров $\{H\}$.
7. Присвоение нулевого значения признаку продолжения итераций $LO=0$.

Цикл по числу элементов $i=1, M$

8. Если вычисленный напор в элементе меньше его вертикальной координаты $H_c(i) < y_c(i)$ или элементу уже присвоен признак непроницаемости $P(i)=1$, то производится переход к следующему элементу.
9. В противном случае элементу задается признак непроницаемости $P(i)=1$ и признак продолжения итераций $LO=1$.

Конец цикла по элементам

10. Если выработан признак продолжения итераций $LO \neq 0$, то производится переход к п. 5.

Цикл по числу узлов $i=1, N$

11. Если узловой напор не превышает вертикальной координаты узла $H_i \leq y_i$, узловой напор и узловое давление в поровой воде обнуляются:

$$H_i = 0; p_i = 0.$$

12. В противном случае вычисляется узловое значение давления в поровой воде $p_i = (H_i - y_i)\gamma_w$.

Конец цикла по узлам

13. Вычисление скоростей фильтрации v_x, v_y в элементах

14. Вывод узловых напоров $\{H\}$ и давлений в поровой воде $\{p\}$, скоростей фильтрации $\{v\}$ и признаков непроницаемости в элементах $\{P\}$.

Конец цикла по числу задач

3.3. Примеры решения задач о безнапорной фильтрации

По предлагемому алгоритму составлена программа для ЭВМ и выполнен ряд примеров расчета. Рассмотрим решение задачи о безнапорной фильтрации тело и основание грунтовой плотины. Пусть плотина имеет размеры поверху 40 м, по основанию – 100 м. Высота плотины – 25 м, мощность однородного основания – 20 м. Плоскость сравнения $O-O$ расположена на отметке кровли водонепроницаемой границы. Напор в верхнем бьефе равен $H_e=40$ м, в нижнем – $H_n=25$ м. Основание и материал плотины приняты изотропными по водопроницаемости с одинаковыми коэффициентами фильтрации. Поскольку задача решается в условиях установившейся фильтрации, для расчетов имеют значение не абсолютные значения коэффициентов фильтрации, а соотношения водопроницаемости грунтов в расчетной схеме. Коэффициент фильтрации в расчетах принят равным единице:

$$k_{x \text{ осн}} = k_{y \text{ осн}} = k_{x \text{ плот}} = k_{y \text{ плот}} = k_f = 1.$$

В практических расчетах для оценки эффективности конструктивных противофильтрационных мероприятий интерес представляют положение депрессионной кривой, направления фильтрации и скорости фильтрации в различных участках основания. Поэтому графические результаты расчетов на рис. 3.4-3.6 представлены в виде векторов скоростей фильтрации в элементах, линий равных напоров и линий равных давлений в поровой воде.

Примеры расчета подготовлены для следующих характерных конструктивных решений устройства плотин: однородная плотина; плотина с противофильтрационным ядром; плотина с дренажом в области низового клина. Коэффициент фильтрации элементов противофильтрационного ядра в расчетах принимался равным $k_{x \text{ ядр}} = k_{y \text{ ядр}} = 10^{-5} k_f$; элементов дренажа – $k_{x \text{ дрен}} = k_{y \text{ дрен}} = 100 k_f$.

Для однородной плотины решение получено за 3 цикла итераций. Поле векторов скоростей фильтрации на рис. 3.4,а определяет направление фильтрации воды через тело и основание плотины. Движение

воды в области верхового клина происходит через тело и основание и направлено вниз и в сторону нижнего бьефа. При этом имеется тенденция к снижению скорости фильтрации воды по глубине: на отметке поверхности воды верхнего бьефа расчетная скорость фильтрации составила $0,163k_f$, а на нижней границе с водонепроницаемой поверхностью – $0,088k_f$. В центральной части плотины и ее основания фильтрация имеет преимущественно горизонтальное направление. Скорость фильтрации по вертикали снижается незначительно, составляя $0,136k_f$ у депрессионной поверхности и $0,131k_f$ возле нижней непроницаемой поверхности. В области низового клина скорость фильтрации увеличивается. Максимальная скорость отмечается на участке высачивания и достигает $0,48k_f$. Векторы фильтрации направлены под углом около 45° к горизонту. Таким образом, определив поле скоростей фильтрации, можно подобрать размер фракций для отсыпки грунтовой плотины.

Расчетом получена ломаная поверхность фильтрационного потока с 1,3-метровым промежутком высачивания в области низового клина (рис. 3.4, *a, б*). Очевидно, что уменьшение размеров конечных элементов покажет более плавную поверхность потока. Гладкая депрессионная кривая потока может быть построена по линиям равных давлений в воде по контрольным точкам, определяющим нулевое давление $p=0$ (рис. 3.4).

Для плотины с центральным противофильтрационным ядром условные размеры ядра в расчетах приняты равными 6 м понизу плотины и 4 м поверху. Решение задачи получено за 3 итерационных цикла. Из представленных рисунков 3.5 можно увидеть падение напоров и, соответственно, преломление свободной поверхности потока в пределах ядра. Высачивание воды через низовой клин происходит на промежутке 0,8 м.

Согласно выполненным расчетам противофильтрационное ядро плотины снижает площадь эффективного сечения в центральной части расчетной схемы. Векторы скоростей фильтрации огибают снизу противофильтрационное ядро, а скорость фильтрации в основании под ядром составляет от $0,375k_f$ сверху до $0,155k_f$ в нижней части основания. Фильтрация преимущественно в горизонтальном направлении происходит непосредственно под низовым клином. Максимальная скорость фильтрации, также как и в случае однородной плотины, отмечается на участке высачивания и достигает $0,48k_f$.

В третьей расчетной схеме в нижней части низового клина предусматривался дренаж размерами 30 м по горизонтали и 2 м по вертикали. Для этого случая решение задачи о безнапорной фильтрации получено за 4 цикла итераций. Расчет показывает быстрое падение напоров в теле плотины (рис. 3.6).

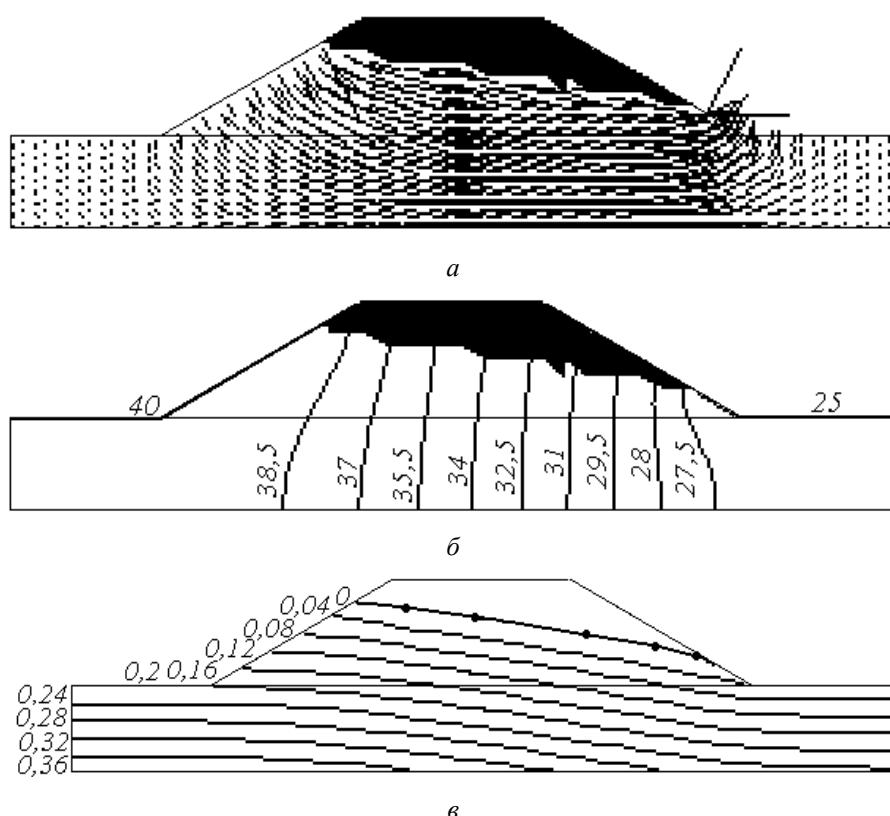


Рис. 3.4. Результаты решения задачи о безнапорной фильтрации через тело и основание однородной грунтовой плотины:
а – поле векторов скоростей фильтрации через тело и основание плотины;
б – линии равных напоров; *в* – линии равных давлений в поровой воде.



Рис. 3.5 (начало).

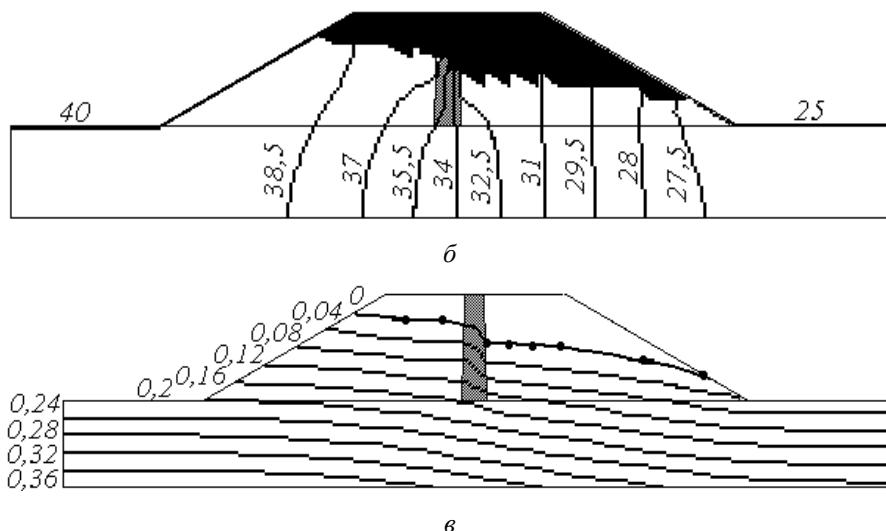


Рис. 3.5 (окончание). Результаты решения задачи о безнапорной фильтрации через тело и основание грунтовой плотины с противофильтрационным ядром:
 а – поле векторов скоростей фильтрации через тело и основание плотины;
 б – линии равных напоров; в – линии равных давлений в поровой воде.

Для принятых параметров дренажа совершенно исключено высачивание через низовой клин. Устройство дренажа позволяет существенно снизить скорость фильтрации воды через основание в области низового клина до $0,05k_f$ за счет увеличения скорости фильтрации через дренажный пласт (рис. 3.6, а).

В следующем примере рассмотрен расчет депрессионной кривой при реконструкции набережной Стрелки Васильевского острова в Санкт-Петербурге. При ремонте подпорной стенки набережной со стороны р. Невы предполагалось устройство шпунтового ограждения на акватории и водопонижение в технологическом котловане. В геологическом строении набережной с поверхности принимают участие насыпные грунты и пылеватые пески. Для исключения суффозионного выноса пылеватых частиц грунта подземными водами в технологический котлован предлагалось предусмотреть береговой противофильтрационный экран из цементно-песчано-глинистого раствора, устраиваемый через тело фундамента нижнего яруса по высоконапорной технологии.

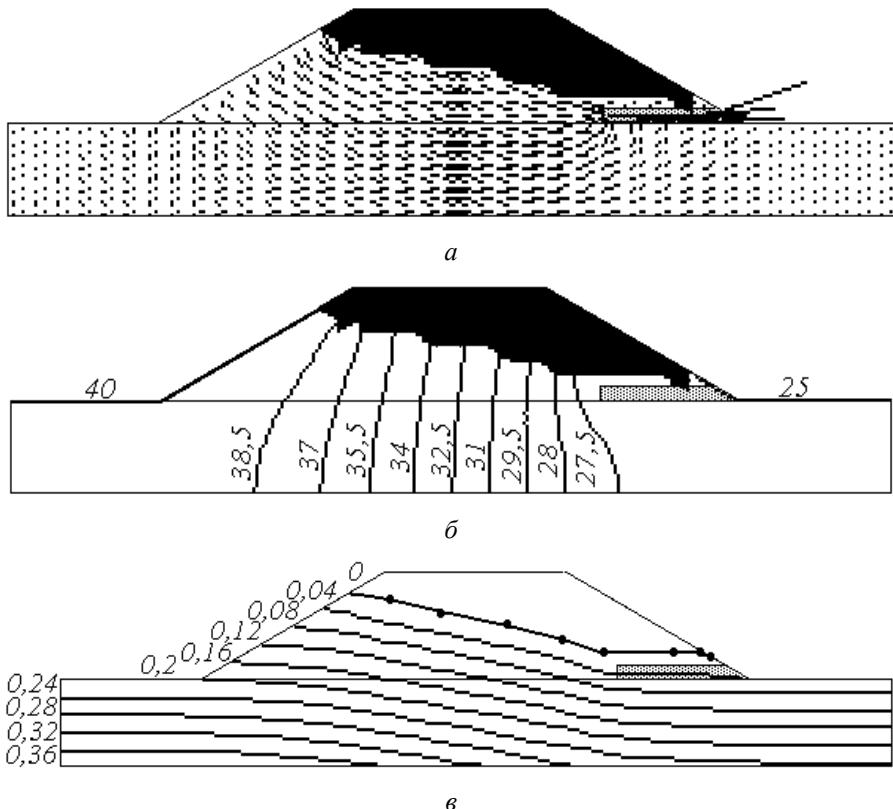


Рис. 3.6. Результаты решения задачи о безнапорной фильтрации через тело и основание грунтовой плотины с дренажом в низовом клине:
а – поле векторов скоростей фильтрации через тело и основание плотины;
б – линии равных напоров; *в* – линии равных давлений в поровой воде.

С целью оценки эффективности противофильтрационной завесы экрана выполнен расчет фильтрационного потока. Расчетная схема задачи для одного из сечений приведена на рис. 3.7. В качестве водоупора принимался слой моренной пылеватой супеси полутвердой консистенции.

Особенность решения такой задачи состоит в том, что уровень воды полностью находится ниже дневной поверхности. В этом случае предлагается по вертикальной граничной поверхности с известным природным уровнем грунтовых вод задавать постоянный напор узлам, находящимся ниже уровня грунтовых вод.

На расчетной схеме, представленной на рис. 3.7, плоскость сравнения принята совпадающей с нижней водонепроницаемой границей, а по правой границе до высоты 8,25 м узлам сетки задан одинаковый

напор $H=8,25$ м. Со стороны котлована напор известен и соответствует отметке, до которой осушается котлован. Эта отметка, как правило, близка к отметке дна котлована. В рассматриваемом случае узлам конечноэлементной сетки с вертикальной координатой 5,25 м от правой границы до противофильтрационной завесы задавался напор $H=5,25$ м.

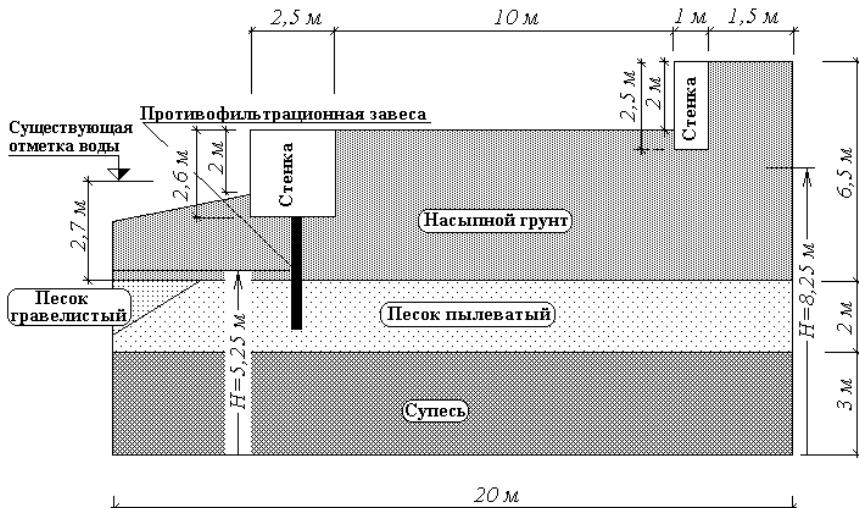


Рис. 3.7. Расчетная схема к задаче об определении положения депрессионной кривой.

Коэффициенты фильтрации для грунтов основания и противофильтрационной завесы в расчетах приняты следующими: для насыпного слоя – 2 м/сут, для пылеватого песка – 1,1 м/сут, для гравелистого песка – 40 м/сут, для супеси – 0,3 м/сут, для противофильтрационной завесы – $5 \cdot 10^{-5}$ м/сут.

В расчетах варьировалась глубина инъектирования грунта от кровли супеси до кровли пылеватых песков. Положение кривой депрессии для четырех рассмотренных случаев показано на рис. 3.8. Во всех случаях решение получено за 3-4 итерационных цикла.

Численный анализ показывает, что при устройстве завесы до кровли слоя пылеватых песков понижение существующего уровня грунтовых вод может достигать 1,4 м, при погружении в слой пылеватого песка на 70 см расчетное понижение уровня грунтовых вод составило 1,1 м, при погружении в слой пылеватого песка на 140 см – 0,7 м. При устройстве завесы до кровли супесей депрессионная кривая близка к природной, а максимальное снижение уровня грунтовых вод по расчету составило 5 см.

Сравнивая поля векторов скоростей фильтрации при различной

глубине инъецирования грунта (рис. 3.9) можно отметить, что увеличение глубины противофильтрационной завесы в пределах слоя пылеватых песков, с одной стороны, приводит к большей концентрации максимальных скоростей фильтрации непосредственно под завесой, с другой стороны, способствует снижению градиента скоростей фильтрации по высоте.

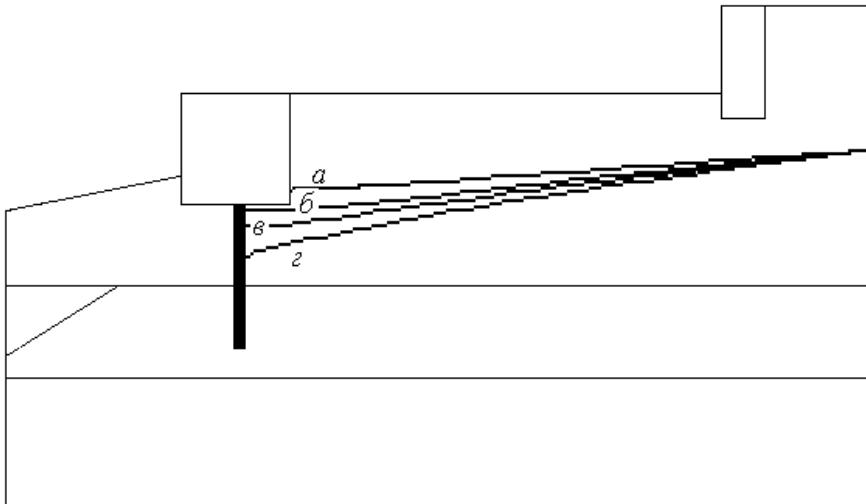


Рис. 3.8. Депрессионные кривые при устройстве противофильтрационной завесы: *a* – до кровли супесей; *b* – при погружении в слой пылеватых песков на 1,4 м; *c* – при погружении в слой пылеватых песков на 0,7 м; *d* – до кровли пылеватых песков.

В случае устройства завесы до кровли пылеватых песков скорость фильтрации у кровли слоя составила 1,5 м/сут, а по подошве – 0,25 м/сут. Максимальная скорость фильтрации в слое супесей равна 0,065 м/сут. При инъектировании пылеватого песка на треть высоты слоя максимальная расчетная скорость фильтрации в пылеватом песке отмечается непосредственно под завесой и составляет 1,2 м/сут, а по подошве пылеватого песка – 0,37 м/сут. Максимальная скорость фильтрации в слое супесей при этом возрастает при этом до 0,08 м/сут. В случае инъектирования грунта до кровли скорость фильтрации в супеси под завесой составляет 0,09-0,13 м/сут.

При устройстве завесы, неполностью перекрывающей слой пылеватых песков максимальный градиент напора может достигать величины:

$$I = \frac{v_f}{k_f} = \frac{1,5}{1,1} = 1,36.$$

Величину критического градиента напора $I_{cr, m}$ для пылеватых супесей, определяемую из условий суффозионной устойчивости грунтов, примем по табл. 3. СНиП 2.02.02.-85 равным 0,56, т.е. равным среднему значению критических градиентов песков мелких и супесей. Таким образом, градиент напора в пылеватом песке может более чем в два раза превышать критическое значение, что вызывает необходимость производить инъектирование до кровли супесей из условий суффозионной устойчивости. Как отмечалось выше, при устройстве завесы до кровли супеси скорость фильтрации (и, соответственно, градиент напора) в супеси увеличивается. Однако максимальное значение градиента напора в супеси, составляющее $I = \frac{0,13}{0,3} = 0,43$, не превышает критической величины $I_{cr, m} = 0,6$.

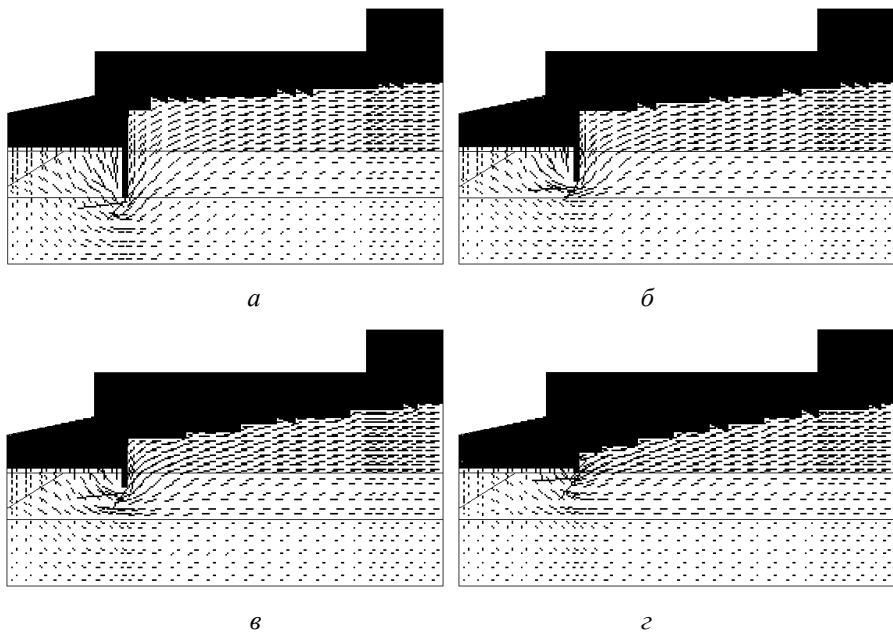


Рис. 3.9. Поле векторов скоростей фильтрации (см. экспликация на рис. 3.8).

3.4. Расчет напряженно-деформированного основания с учетом фильтрации воды

Движущаяся жидкость оказывает на скелет грунта гидравлическое воздействие, которое для элементарного объема представляет результирующую силу, складывающуюся из элементарной силы давления воды на частицы грунта и элементарной силы трения, которая определяется через градиент скорости и вязкость воды (Гольдин А.Л., Рассказов Л.Н., 1987). Более удобным считается представление результирующей силы в виде суммы вертикальной взвешивающей (архимедовой) силы W , действующей на скелет грунта, и фильтрационной силы f , направленной по касательной к линии тока.

В макрообъемах фильтрационные силы влияют на общее напряженно-деформированное состояние тела грунтовой плотины и основания, которое можно анализировать на основе законов механики сплошной среды.

Таким образом, на скелет грунта в единице объема в области фильтрационного потока действуют 3 объемные силы: собственный вес грунта G , взвешивающая сила W и фильтрационная сила f (рис. 3.10). Рассмотрим элемент грунта толщиной 1, находящийся в условиях плоской деформации. Объем элемента равен $dV = dx \cdot dy \cdot 1$.

Вес элемента $G = \gamma dx \cdot dy$, где γ – удельный вес грунта.

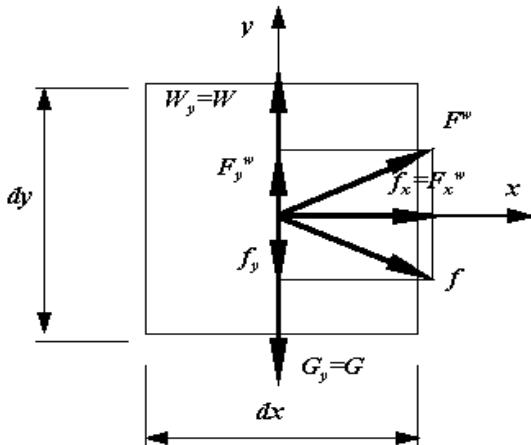


Рис. 3.10. Система сил, действующих на элементарный объем грунта при фильтрации воды.

Взвешивающая сила W действует вертикально вверх. Вертикальная составляющая силы равна произведению удельного веса воды на площадь поперечного сечения элемента:

$$W_y = W = \gamma_w dx \cdot dy,$$

а горизонтальная составляющая равна нулю:

$$W_x = 0.$$

Значение фильтрационной силы определяется как произведение градиента давления в воде на площадь поперечного сечения элемента:

$$f = -\gamma_w dH/dl \cdot dx dy.$$

Тогда вертикальная составляющая фильтрационной силы равна:

$$f_y = -\gamma_w \partial H / \partial y \cdot dx dy = -\gamma_w [\partial(p/\gamma_w) / \partial y + dy/dy] \cdot dx dy,$$

или

$$f_y = -(-\partial p / \partial y \cdot dx dy + \gamma_w dx dy),$$

а горизонтальная составляющая:

$$f_x = -\gamma_w \partial H / \partial x \cdot dx dy = -\partial p / \partial x \cdot dx dy$$

Результирующие составляющие силы давления воды равны сумме взвешивающей и фильтрационной сил:

$$F_x^w = f_x + W_x = -\partial p / \partial x \cdot dx dy;$$

$$F_y^w = f_y + W_y = -\partial p / \partial y \cdot dx dy.$$

Знак (-) означает, что сила направлена в сторону уменьшения функции давления в поровой воде p по соответствующему направлению.

Результирующая сила F^w представляет объемную силу, действующую на скелет грунта и направленную перпендикулярно линиям равных пьезометрических высот (давлений в поровой воде). Таким образом, при решении задачи о напряженно-деформированном состоянии основания с учетом действия фильтрационных сил методом конечных элементов к вектору узловых сил системы необходимо добавить вектор объемных сил:

$$\{F^w\} = \{F_x^w \ F_y^w\}^T$$

Сделаем допущение о том, что грунт ниже депрессионной кривой полностью водонасыщен, т.е. $S_r=1$, а выше депрессионной кривой имеет степень водонасыщения $S_r=0,5$. Запишем выражение для удельного веса грунта в виде:

$$\gamma = \gamma_w + S_r \cdot n \cdot \gamma_w = \gamma_d + S_r \cdot (\gamma_s - \gamma_d) / \gamma_d \cdot \gamma_w,$$

где γ_d – удельный вес скелета грунта;

n – пористость;

γ_s – удельный вес минеральных частиц.

Если принять, что $\gamma_w=10 \text{ кН/м}^3$ и $\gamma_s=27 \text{ кН/м}^3$, то

$$\gamma = \gamma_d \cdot (1 - 0,38 \cdot S_r) + S_r \cdot \gamma_w.$$

Тогда, при степени водонасыщения $S_r=0,5$ удельный вес грунта будет равен:

$$\gamma = 0,81\gamma_d + 0,5\gamma_w,$$

а при $S_r=1$:

$$\gamma = 0,62\gamma_d + 0,5\gamma_w.$$

При аппроксимации поверхности перемещений треугольными элементами первого порядка вес элемента поровну распределяется на 3 узла элемента. Следовательно, горизонтальные узловые силы от веса грунта равны нулю, а вертикальные:

$$G_{yi} = G_{yj} = G_{yk} = G/3 = \gamma\Delta/3.$$

Объемную силу F^w можно выразить через потенциал (градиент) давлений в поровой воде:

$$F_x^w = -\partial p/\partial x \cdot dx dy, \quad F_y^w = -\partial p/\partial y \cdot dx dy,$$

либо через давления в воде:

$$F_x^w = -p dy, \quad F_y^w = -p dx.$$

где давления в поровой воде определяются из фильтрационного расчета. Вектор давлений в узлах элемента равен:

$$\{p\} = \begin{bmatrix} p_i & p_j & p_k \end{bmatrix}^T$$

В случае постоянных сил F_x и F_y давление в воде должно изменяться внутри элемента по линейному закону. Функция формы для него, очевидно, может быть построена в виде:

$$p = [N_i \quad N_j \quad N_k] \{p\}.$$

Тогда

$$\partial p / \partial x = \partial N / \partial x \cdot p = 1/2\Delta \cdot [b_i \quad b_j \quad b_k] \{p\},$$

$$\partial p / \partial y = \partial N / \partial y \cdot p = 1/2\Delta \cdot [c_i \quad c_j \quad c_k] \{p\}.$$

Если все силы распределены между узлами поровну, то вектор фильтрационных сил равен:

$$\{F^w\} = \begin{cases} F_{xi}^w \\ F_{xj}^w \\ F_{xk}^w \\ F_{yi}^w \\ F_{yj}^w \\ F_{yk}^w \end{cases} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{cases} p_i \\ p_j \\ p_k \end{cases}. \quad (3.6)$$

При определении объемных сил через давления в воде в каждом узле должна быть приложена сила, растягивающая элемент:

$$F_{xi}^w = p \cdot dy (p_i + p_j + p_k) / 3 \cdot (y_j - y_k) / 2 = (p_i + p_j + p_k) / 6 \cdot b_i \cdot sign(\Delta),$$

$$F_{yi}^w = p \cdot dx = (p_i + p_j + p_k) / 3 \cdot (x_k - x_j) / 2 = (p_i + p_j + p_k) / 6 \cdot c_i \cdot sign(\Delta),$$

или в матричной форме:

$$\{F^w\} = \begin{cases} F_{xi}^w \\ F_{xj}^w \\ F_{xk}^w \\ F_{yi}^w \\ F_{yj}^w \\ F_{yk}^w \end{cases} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_i & b_i \\ b_j & b_j & b_j \\ b_k & b_k & b_k \\ c_i & c_i & c_i \\ c_j & c_j & c_j \\ c_k & c_k & c_k \end{bmatrix} \begin{cases} p_i \\ p_j \\ p_k \end{cases} sign(\Delta), \quad (3.7)$$

где $sign(\Delta)$ – знак площади элемента.

В последнем случае при решении задачи о напряженно-деформированном состоянии грунтовой плотины и ее основания на водопроницаемых поверхностях верхнего и нижнего бьефа необходимо приложить дополнительные узловые силы, нормальные к границам, от градиентов давления воды соответствующего бьефа. Однако, поскольку при уменьшении размера элемента фильтрационные силы на водопроницаемой поверхности должны стремиться к нулю, поэтому в первом приближении к узлам с заданными напорами можно приложить нулевые объемные силы. Как показали расчеты, принципиально результаты решения по обоим вариантам формирования вектора фильтрационных сил близки.

Алгоритм формирования вектора фильтрационных сил может быть представлен следующим образом:

Цикл по элементам $i=1,M$ (Формирование узловых сил от собственного веса грунта и фильтрационных сил)

1. Если элемент имеет признак непроницаемости $P(i)=0$, то удельный вес грунта вычисляется из выражения $\gamma = 0,81\gamma_d + 0,5\gamma_w$; в противном случае из выражения $\gamma = 0,62\gamma_d + 0,5\gamma_w$.

2. Вычисление вектора фильтрационных сил в узлах элемента $\{F^w\}$ по формуле (6) или (7).

Для оценки влияния фильтрационных сил на напряженно-деформированное состояние грунта рассмотрим результаты численных расчетов плотины и ее основания с учетом фильтрационных сил на базе упруго-пластической модели, реализующей идеальную упруго-пластичность с предельной поверхностью, описываемой критерием Мора-Кулонса, для изотропных по водопроницаемости грунтов.

Для сравнения выполнены расчеты для однородной плотины, плотины с центральным противофильтрационным ядром, плотины с дренажом в низовой призме, однородной плотины с одинаковым уровнем воды в бьефах $H_b=H_n=25$ м. Характеристики грунтов основания и тела плотины в расчетах приняты одинаковыми: модуль деформации $E=10$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu=0,25$; удельный вес скелета грунта $\gamma_d=12,9$ кН/м³; удельное сцепление $c=0,05$ МПа; угол внутреннего трения $\phi=25^\circ$.

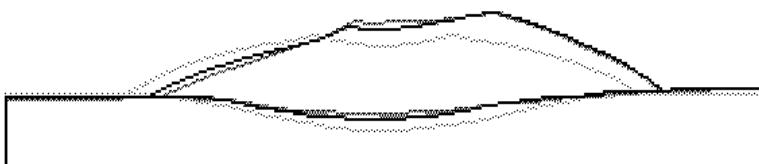


Рис. 3.11. Деформированные схемы грунтовой плотины и основания при расчете с учетом действия фильтрационных сил (масштаб деформаций увеличен в 20 раз):

- · · · · – однородная плотина с одинаковым уровнем воды в бьефах;
- однородная плотина с различным уровнем воды в бьефах;
- плотина с центральным противофильтрационным ядром;
- плотина с дренажом в низовой призме.

Задачи решались в два этапа. На первом этапе формировалось природное напряженное состояние основания плотины от собственного веса грунта. Тензор природных напряжений принят шаровым. Элементам плотины на этом этапе задавался нулевой удельный вес. На втором этапе моделировалось напряжено-деформированное состояние плотины и ее основания. Нагрузки от собственного веса элементов плотины прикладывались в соответствии с предложенным алгоритмом в за-

вистимости от положения элемента относительно депрессионной кривой. Фильтрационные силы и положение депрессионной кривой определялись по результатам решений, приведенных в разделе 3.3. Результаты решения задачи приведены на рис. 3.11, 3.12 и в табл. 3.1.

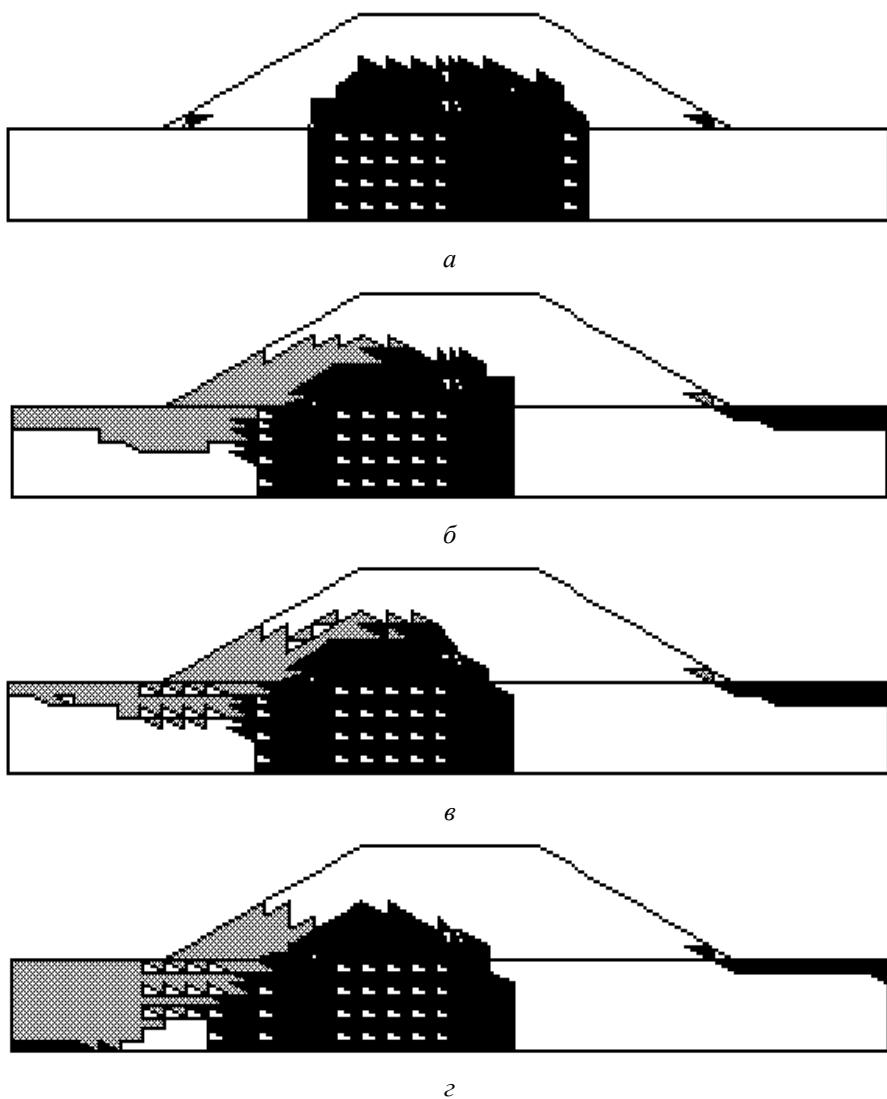


Рис. 3.12. Области развития предельного состояния в теле и основании грунтовой плотины (закрашенные области находятся в предельном состоянии, заштрихованные области испытывают деформацию растяжения):

a – однородная плотина с одинаковым уровнем воды в бьефах; *б* – однородная плотина с различным уровнем воды в бьефах; *в* – плотина с центральным противофильтрационным ядром; *г* – плотина с дренажом в низовой призме.

Согласно расчетам, при постоянном уровне воды в бьефах деформации плотины и ее основания симметричны относительно плоскости симметрии плотины. Максимальная расчетная осадка приурочена к центральной точке верхней плоскости плотины и составила 0,97 м. Области предельного состояния грунта также симметричны относительно плоскости симметрии плотины и развиваются как в основании, так и в теле плотины на расстояние до 30 м от плоскости симметрии и на высоту до 36 м над нижней несжимаемой границей.

Таблица 3.1
Расчет плотин с учетом фильтрационных сил

| Конструкция плотины | Горизонтальное смещение плотины (м) | Максимальная осадка верха плотины (м) |
|---------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
| Однородная | 0,84/0,71 | 0,76 |
| С ядром | 0,84/0,72 | 0,8 |
| С дренажом | 0,91/0,8 | 0,62 |

Примечание: в числителе – горизонтальное смещение верха плотины со стороны верховой призмы, в знаменателе – то же, со стороны низовой призмы.

Повышение уровня воды в верхнем бьефе приводит к горизонтальным смещениям плотины в направлении нижнего бьефа. Интересно отметить следующий эффект, полученный в результате численных экспериментов. Обычно при расчетах плотин давление в воде рассматривается как вертикальная взвешивающая сила, а горизонтальное давление фильтрационного потока прикладывается к центральному ядру, если оно предусмотрено в конструкции плотины. Однако данные расчета показывают, что во всех трех случаях имеются примерно одинаковые горизонтальные перемещения (табл. 3.1) и формы смещений (рис. 3.11). При этом деформации однородной плотины и плотины с противофильтрационным ядром практически одинаковы, а дренаж в низовой призме приводит к увеличению горизонтальных смещений плотины. Очевидно, что появление горизонтальных смещений плотины и основания вызвано действием фильтрационных сил, направление которых, как показано в разделе 3.3, имеет преимущественно горизонтальное направление. Дренаж с принятymi расчетными параметрами приводит к более интенсивному снижению поверхности свободного потока в области низовой призмы, чем остальные рассмотренные конструктивные решения плотины. Следовательно, меньший объем плотины в низовой призме будет испытывать взвешивающее давление. Тогда эффективный вес низового клина, вызывающий деформации плотины и основания, для плотины с дренажом будет наибольшим из рассмотр-

ренных случаев, что и вызывает наибольшие горизонтальные смещения.

Действие фильтрационных сил приводит к смещению областей предельного состояния в сторону верхнего бьефа (рис. 3.12). В основании верховой призмы развиваются растягивающие напряжения, захватывая частично нижнюю область тела плотины, причем для плотины с дренажом растяжение основания отмечается до нижней несжимаемой границы.

Сравнивая характер деформаций плотины и ее основания при различном уровне воды в верхнем бьефе, можно отметить, что вертикальные перемещения при высоком уровне воды меньше, чем при низком. Эта разница объясняется тем, что при высоком уровне воды большая часть плотины находится ниже депрессионной кривой и испытывает взвешивающее действие воды, и, таким образом, передает меньшую эффективную нагрузку на основание.

Следовательно, если рассматривается задача о повышении уровня воды в верхнем бьефе после возведения плотины, материал плотины будет испытывать взвешивание, что приведет к появлению разгрузочных эффектов. В этом случае более корректным является использование механических моделей грунта, включающих в себя описание работы грунта при пассивном нагружении. В случае же понижения уровня воды в нижнем бьефе достаточным для практических целей будет использование упругопластической модели грунта, на основании которой выполнены расчеты.

При осушении котлованов понижение природного уровня грунтовых вод в окружающем массиве грунта приводит к появлению дополнительных эффективных напряжений в скелете, вызывающих уплотнение грунта без проявления разгрузочных эффектов. Следовательно, в этом случае для анализа изменения напряженно-деформированного состояния грунта также допустимо использование упругопластической модели без учета набухания грунта.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабаян Л.Г.** Конечно-элементная методика для совместных расчетов фильтрационного режима и статической работы системы "бетонная плотина – скальное основание" //Гидротехническое строительство. 1992. №4. – с.10–19.
2. **Гольдин А.Л., Рассказов Л.Н.** Проектирование грунтовых плотин: Учеб. пособие для вузов. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 304 с.
3. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 544 с.
4. **Конор Дж., Бреббия К.** Метод конечных элементов в механике жидкости. Пер. с англ. – Л.: Судостроение, 1979. – 264 с.
5. **Пашков М.Г., Шешукова Ф.И.** Моделирование задачи нелинейной плановой безнапорной фильтрации в гидросооружениях при нестационарном режиме. //Сб. науч. тр. Гидропроекта., 1987. Вып. 124. – с. 42–46.
6. **Рассказов Л.Н., Аникин Н.А., Желанкин В.Г. и др.** Фильтрация в грунтовых плотинах в плоской и пространственной постановке. //Гидротехническое строительство. 1989. №11. – с. 26–32.
7. **СНиП 2.02.02-85.** Основания гидротехнических сооружений. М., ЦИТП Госстроя СССР, 1986. – 48 с.
8. **Фадеев А.Б.** Метод конечных элементов в геомеханике. Изд-во «Недра». М., 1987. – 224 с.
9. **Фадеев А.Б., Прегер А.Л.** Решение геотехнических задач методом конечных элементов. (Часть I) Томск: Изд-во Том. ун-та. 1994. – 194 с. (Часть II) – 136 с.
10. **Цытович Н.А. Тер-Мартиросян З.Г.** Основы прикладной геомеханики в строительстве: Учеб. пособие. – М.: Высш. школа, 1981. – 317 с.

4

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ГРУНТА ДЛЯ УСЛОВИЙ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ

4.1. Геометрически нелинейные задачи в геотехнике

Одним из основных принципов проектирования оснований является принцип проектирования по предельным состояниям и, в первую очередь, по II группе предельных состояний, т.е. по деформациям. Расчет по II группе предельных состояний заключается в удовлетворении условию:

$$S \leq S_u, \frac{\Delta S}{L} \leq \left(\frac{\Delta S}{L} \right)_u,$$

где S – осадка сооружения, S_u – предельно допустимая осадка, $\frac{\Delta S}{L}$ – неравномерность осадок, $\left(\frac{\Delta S}{L} \right)_u$ – предельно допустимая неравномерность осадок.

Предельно допустимые значения деформаций регламентированы действующими нормами из условий безопасной эксплуатации сооружений, а в ряде случаев определяются технологическими требованиями для промышленных предприятий и архитектурными соображениями. При проектировании нового сооружения деформации основания определяются от веса сооружения, а при проектировании сооружений рядом с существующими оценивается развитие дополнительных деформаций существующей застройки от влияния нового строительства.

Расчет напряженно-деформированного состояния оснований изначально основывался на применении решений теории упругости для полупространства, после того, как Н.М. Герсеванов на основе анализа результатов компрессионных испытаний сформулировал принцип линейной деформируемости. Поскольку предельно допустимые значения осадок сооружений при расчетах оснований, как правило, невелики (порядка 10...15 см), методы расчета осадок фундаментов в геотехнике основаны на использовании соотношений Коши для бесконечно малых деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

а геометрическая нелинейность не нашла отражения в геотехнических расчетах.

Ряд геотехнических работ, таких, как бурение скважин для устройства буровабивных свай, погружение свай в грунт, экскавация грунта и т. п. сопровождаются значительными локальными деформациями и смещениями грунта, приводящими к изменению общего напряженно-деформированного состояния основания.

Экспериментальное исследование такого рода геотехнических проблем отражено в работах Б.В. Бахолдина и др. (1987, 1997), В.В. Беленькой, Е.М. Перлея и др. (1973), С.Я. Боженкова и А.А. Бирюкова (1937), В.Ф. Гречко и др. (1988), В.А. Громова и А.М. Завьялова (1987), Б.М. Гуменского и Г.Ф. Новожилова (1960), Б.И. Далматова, С.Н. Сотникова и др. (1973, 1992), В.С. Копейкина (1980), М.Ф. Новикова и В.С. Пушкаревича (1987), Е.В. Светинского и М.С. Гайдая (1993), И.П. Середюка (1977), В.И. Тепликова и др. (1987), А.А. Цесарского и И.Н. Коломийца (1988), S.B. Avery and S.D. Wilson (1950), A.E. Cummings and oth. (1950) и других исследователей. Анализическое исследование этих задач не может быть выполнено на основе использования традиционной в геотехнике меры малых деформаций.

Теория конечных деформаций разработана, прежде всего, для описания деформаций высокоэластичных сред и нашла свое отражение в работах А.И. Леонова (1973), А.Л. Лурье (1980), В.В. Новожилова (1989), В.Прагера (1963), К.Ф. Черных (1988) и др. При решении конкретных задач используются различные способы описания напряженного и деформированного состояний. К.Ф. Черных привел сопряженные (энергетические) пары тензоров, для которых скалярное произведение тензора напряжений на тензор деформаций представляет собой работу.

Любое движение деформируемой среды может быть представлено как сумма движений: деформационное и жесткое движение, включающее поворот и параллельный перенос. Для разделения движения среды на деформационное и жесткое вводится подвижная система координат, с которой связывается наблюдатель, и движение которой представляет собой движение рассматриваемого объема. При этом в качестве тензорных мер скорости изменения напряженного и деформированного состояния вводятся объективные меры, исключающие жесткое движение, в связи с чем при построении определяющих соотношений большую популярность получили так называемые коротационные производные тензоров, определяющие скорость изменения тен-

зора относительно подвижной системы координат. Запись соотношений в скоростной форме удобна для решения задач теории пластического течения, в соответствии с которой приращение деформаций рассматривается как сумма приращений упругой и пластической деформации.

Следует заметить, что понятие «жесткое движение» является условным, поэтому представлений движения как деформационного и жесткого бесконечное множество и бесконечным числом способов можно выбрать подвижную систему координат. Наиболее популярны среди исследователей следующие системы подвижных координат:

- декартова ортогональная система координат с ортонормированным базисом, перемещающаяся вместе с материальной частицей и вращающаяся с угловой скоростью вращения материальных волокон, называемой вихрем W ;

- декартова ортогональная система координат с ортонормированным базисом, перемещающаяся вместе с материальной частицей и вращающаяся с угловой скоростью вращения эйлеровых координат относительно лагранжевых, называемой спином Ω ;

- лагранжева сопутствующая система координат с основным или сопряженным базисом. В этих случаях учитывается не только скорость вращения базиса, но и скорость изменения длин базисных векторов и углов между ними.

Общий вид дифференциального уравнения, определяющего состояние среды, можно записать в виде:

$$S^r = C : T^r, \quad (4.1)$$

где S^r – объективная (индифферентная) мера скорости изменения напряженного состояния;

T^r – объективная мера скорости изменения деформированного состояния;

C – четырехвалентный тензор свойств среды, компоненты которого определяются законом упруго(вязко)пластичности.

Символ $(:)$ представляет оператор свертки по индексам.

Параметры тензора C определяют механическую модель среды, а выражение (4.1) в общей форме выражает математическую формулировку механической модели.

В качестве меры изменения напряженного состояния обычно принимается скорость изменения тензора напряжений Коши σ , компоненты которого σ_{ij} в декартовом ортонормированном базисе представляют собой составляющие вектора напряжений, действующего на площадку с нормалью k_i по направлению k_j . В литературе тензор напряжений Коши называют тензором «истинных» напряжений. В качестве меры

изменения деформированного состояния принимается тензор скорости деформаций D , компоненты которого определяются из выражения:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

где v_i – скорость перемещений относительно неподвижной системы координат;

x_i – текущие координаты рассматриваемой частицы относительно неподвижной системы координат.

В этом случае соотношение (4.1) принимает вид:

$$\sigma^r = C : D.$$

В небольшом количестве публикаций в геотехнике, связанных с решением геотехнических задач в геометрически нелинейной постановке, можно отметить работы В.С.Копейкина (1980), рассмотревшего решение задачи о нагружении штампа в лагранжевых переменных. Физическая нелинейность им рассматривалась в рамках нелинейной теории упругости с уравнением Вялова для объемного деформирования и уравнением Боткина для формоизменения.

При решении упругопластических задач в геометрически нелинейной постановке популярность получило использование коротационной производной тензора напряжений по Яуманну. Система конечноэлементных уравнений для решения упругопластических задач геотехники в эйлеровых переменных с использованием коротационной производной по Яуманну предложена В.Г. Федоровским (1986). А.Б. Фадеев (1987) приводит результаты С.А. Anderson and R.J. Bridwell конечно-элементного решения задачи о последовательности формирования во времени геологического слоя при горизонтальном сжатии тектоническим силами.

Недостаточная распространенность использования геометрически нелинейных соотношений в геотехнике, противоречивость в результатах, получаемых при различных способах построения геометрически нелинейных соотношений (А.А. Поздеев и др., 1986) вызывают необходимость в анализе существующих методов решения и разработке метода решения геометрически нелинейных задач, учитывающих особенности работы грунтов.

Построение разрешающих уравнений в замкнутой форме при сложной геометрии напластования грунтов, произвольном нагружении как в пространстве, так и во времени, изменении граничных условий задачи, использовании нелинейных зависимостей между напряжениями и деформациями, возможно в настоящее время только численными

методами, и, в частности, с привлечением одного из наиболее развитых и апробированных – метода конечных элементов (МКЭ).

4.2. Анализ механических эффектов, отражаемых различными способами описания геометрической нелинейности

4.2.1. Принципы построения конечноэлементных соотношений для геометрически нелинейных задач

Как отмечалось в разделе 4.1, общий вид дифференциального уравнения, определяющего состояние среды, может быть записан в виде (4.1):

При использовании скорости изменения тензора Коши относительно подвижной системы координат как объективной меры изменения напряженного состояния и тензора скорости деформаций

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (4.2)$$

как объективной меры изменения деформированного состояния соотношение (4.1) принимает вид:

$$\sigma^r = C : D. \quad (4.3)$$

Ниже предлагается общий подход к построению конечноэлементных соотношений для моделей геометрически и физически нелинейных сред. Одним из основных принципов при построении определяющих соотношений является их инвариантность по отношению к изменению системы координат наблюдателя, следовательно, все соотношения должны быть записаны в тензорной форме.

Анализ соотношения (4.3) в расчетах больших деформаций выполним с использованием метода конечных элементов. Для составления системы конечно-элементных уравнений воспользуемся понятием мощности напряжений, введенным А.И. Лурье (1980) и В. Прагером (1963):

$$N = \int_V \sigma : D dV, \quad (4.4)$$

где под \hat{V} подразумевается текущий объем.

Мощность контурных сил F на скоростях перемещений v равна скалярному произведению:

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (4.5)$$

Приравнивая правые части выражений (4.4) и (4.5), получим:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \int_{\hat{V}} \sigma : D d\hat{V}. \quad (4.6)$$

Представим основные соотношения в матричной форме. Вектор скорости деформаций можно выразить через вектор скорости перемещений:

$$\{D\} = [B]\{v\}, \quad (4.7)$$

где $[B]$ – матрица производных функций формы элемента. Тогда соотношение (4.6) может быть записано в виде:

$$\{v\}^T \{F\} = \int_{\hat{V}} \{v\}^T [B]^T \{\sigma\} d\hat{V}. \quad (4.8)$$

Аппроксимируем поверхность скоростей перемещений треугольными симплекс-элементами с текущими координатами узлов x_i относительно неподвижной системы координат. Заменив в выражении (4.8) интегрирование по объему умножением на объем и сократив левую и правую части выражения на $\{v\}^T$, получим:

$$\{F\} = [B]^T \{\sigma\} \hat{V}. \quad (4.9)$$

Для записи конечно-элементных соотношений в скоростной форме продифференцируем выражение (4.9) по времени:

$$\{\dot{F}\} = [B]^T \{\dot{\sigma}\} \hat{V} + ([B]^T \hat{V})^* \{\sigma\}. \quad (4.10)$$

В задачах упругопластичности время в явном виде не фигурирует и под понятием «скорость» подразумевается «приращение».

Второе слагаемое в правой части выражения (4.10) представляет собой приращение усилия за счет изменения геометрии рассматриваемой области. Заметим, что исключение второго слагаемого (предполагаемое в так называемом Δ -методе) может привести к существенным погрешностям расчетов при больших деформациях. В качестве примера можно привести решение задачи о сжатии полосы с единичными размерами (рис. 4.1,*a*) по выражению (4.10) и по Δ -методу.

Прикладывая шагами вертикальное смещение Δh , будем фиксировать величину реактивного вертикального усилия. Если вертикальное напряжение σ_y в обоих случаях расчета одинаково (рис. 4.1,*b*), то начиная с величины относительного сжатия $\frac{\Delta h}{h} \approx 0,3$ заметно отставание усилия, рассчитанного по Δ -методу (график 1, рис. 4.1,*c*) от действи-

тельного значения (график 2, рис. 1.1,*в*), причем это отставание тем существеннее, чем выше коэффициент Пуассона (см. графики 1 и 2, рис. 4.1,*г* при $\nu = 0,49$).

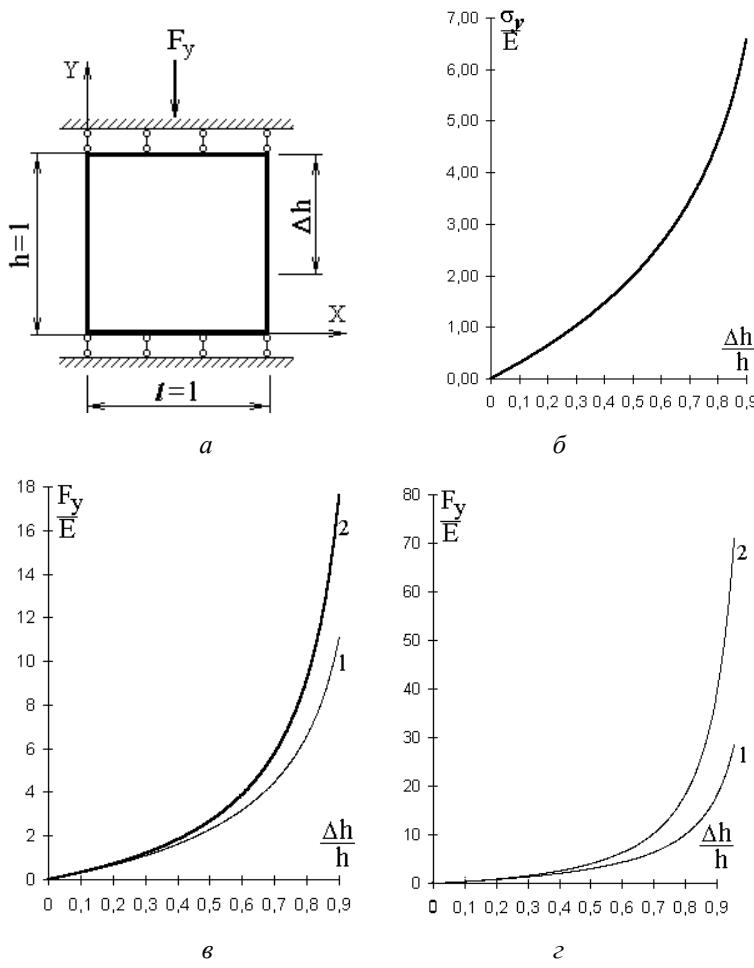


Рис. 4.1. Задача о сжатии полосы

а – расчетная схема; *б* – график зависимости вертикального напряжения от величины относительного сжатия; *в* – график зависимости реактивного вертикального усилия от величины относительного сжатия при коэффициенте Пуассона $\nu = 0,3$; *г* – график зависимости реактивного вертикального усилия от величины относительного сжатия при коэффициенте Пуассона $\nu = 0,49$;

1 – расчет по Δ -методу; 2 – расчет по выражению 4.10.

Величину усилия через напряжения и площадь поперечного сечения элемента для данного случая можно также вычислить аналитиче-

ски:

$$F_y = \sigma_y \cdot \hat{A} \text{ — при вычислении усилия из выражения (4.10);}$$

$$F_y = \sigma_y \cdot \frac{\hat{A} + A_0}{2} \text{ — при вычислении по } \Delta\text{-методу;}$$

$F_y = \sigma_y \cdot A_0$ — при вычислении усилия в соответствии с теорией бесконечно малых деформаций, где A_0 и \hat{A} — соответственно, исходная и текущая площадь поперечного сечения.

Несложно показать, что для упругопластических сред ошибка будет тем выше, чем в большей степени среда обладает свойствами увеличиваться в объеме при сдвиге (дилатантными свойствами).

В соответствии с представлениями о разложении движения на деформационное и жесткое введем некоторую подвижную систему координат и выразим скорость изменения напряжений $\dot{\sigma}$ относительно неподвижной системы координат в виде суммы:

$$\{\dot{\sigma}\} = \{\sigma\}^r + [Q]\{\sigma\}, \quad (4.11)$$

где $\{\sigma\}^r = [C][D] = [C][B]\{v\}$ — скорость изменения компонент тензора напряжений относительно подвижной системы координат, а $[Q]$ — матрица, определяющая скорость изменения напряжений для наблюдателя, движущегося вместе с подвижной системой координат, а форма записи этой матрицы зависит от выбора подвижной системы.

Тогда выражение (4.10) следует записать в виде:

$$\{\dot{F}\} = [B]^T [C][B]\{v\}\hat{V} + [B]^T [Q]\{\sigma\}\hat{V} + ([B]^T \hat{V})^*\{\sigma\}. \quad (4.12)$$

Вынося вправо несимметричную в общем случае часть системы уравнений, получим следующее выражение:

$$[B]^T [C][B]\{v\}\hat{V} = \{\dot{F}\} - [B]^T [Q]\{\sigma\}\hat{V} - ([B]^T \hat{V})^*\{\sigma\}, \quad (4.13)$$

или

$$[B]^T [C][B]\{v\}\hat{V} = \{\dot{F}\} - \{\Delta F\}, \quad (4.14)$$

где

$$\{\Delta F\} = [B]^T [Q]\{\sigma\}\hat{V} + ([B]^T \hat{V})^*\{\sigma\}, \quad (4.15)$$

являющаяся невязкой к системе линейных уравнений (4.14), которая может корректироваться на очередном шаге решения тем или иным методом.

4.2.2. Оценка корректности использования различных коротационных производных для разложения движения сред на жесткое и деформационное

Решение практических задач с использованием коротационных производных осуществляется в следующем порядке. К расчетной схеме мелкими шагами прикладывается нагрузка. На каждом шаге определяется вектор скоростей (приращений) узловых перемещений $\{v\}$, по которому из выражения (4.11) вычисляются коротационные производные осевых напряжений $\{\sigma'\}^r$, суммарные напряжения $\{\sigma\}$. Затем определяются новые координаты узлов конечно-элементной сетки, вычисляется вектор $\{\Delta F\}$ и выполняется расчет для следующего шага по нагрузке. При задании нагрузки мелкими шагами величины $\{\sigma\}$, $[B]$, \hat{V} могут приниматься в соответствии с достигнутыми на предыдущем шаге напряжениями и топологией конечно-элементной сетки и, при необходимости, корректироваться на текущем шаге нагрузления стандартными итерационными процедурами.

Необходимость введения объективных производных, исключающих движение среды как жесткого целого, можно продемонстрировать на следующем примере. Зададим полосовому элементу одинаковые по значению и разные по направлению перемещения для формирования некоторого сочетания вертикальных σ_y и горизонтальных σ_x напряжений (рис. 4.2,*a*). При таких условиях нагрузения касательные напряжения τ_{xy} равны нулю. Затем повернем элемент на 90° . Очевидно, что при таком повороте осевые напряжения должны поменяться местами, а касательные напряжения τ_{xy} , пройдя через экстремум при повороте на 45° , должны снова упасть до нуля.

Однако если в качестве меры скорости изменения напряженного состояния принимается $\dot{\sigma}$, то величины напряжений при повороте элемента остаются неизменными (рис. 4.2,*b*, *c*; графики 1).

Выбрав в качестве подвижной системы координат декартову ортогональную систему координат, врачающуюся со скоростью тензора вихря W , компоненты которого определяются из выражения

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right), \quad (4.16)$$

то в результате получаем коротационную производную в смысле Яуманна σ' . Матрица $[Q]$ в выражении (4.12) в этом случае для условий плоской деформации примет следующий вид:

$$[Q] = W \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где $W = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 - b_1 u_1 - b_2 u_2 - b_3 u_3$.

В этом случае вращение элемента сопровождается сменой местами нормальных напряжений (рис. 4.2,б, графики 2), переходом через максимум и падением до нуля касательных напряжений (рис. 4.2,в, графики 2).

В работе А.А. Поздеева и др. (1986) на примере простого сдвига гипоупругой среды, для которой компоненты тензора C определяются из выражения

$$C_{ijkl} = 2G \cdot \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right),$$

показано, что использование соотношения (4.3) с коротационной производной по Яуманну приводит к результатам, противоречащим здравому смыслу – графики нормальных и касательных напряжений представляют собой осциллирующие кривые, причем касательные напряжения периодически меняют свой знак (рис. 4.4, графики 1). Для того чтобы избежать этого эффекта Y.F. Dafalias (1983) предложил скорость вращения подвижной декартовой ортонормированной системы координат рассматривать в форме спина. Наш анализ показывает, что при использовании в соотношении (4.3) коротационной производной σ^Ω условиям простого сдвига отвечают растущие значения нормальных и касательных компонент тензора напряжений (рис. 4.3, графики 2). Матрица $[Q]$ в этом случае в выражении (4.12) будет равна:

$$[Q] = \Omega \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где Ω – скорость вращения эйлеровых координат относительно лагранжевых.

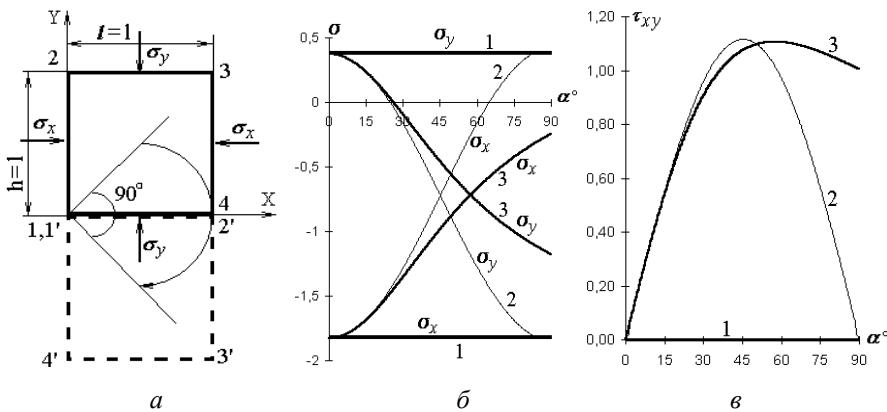
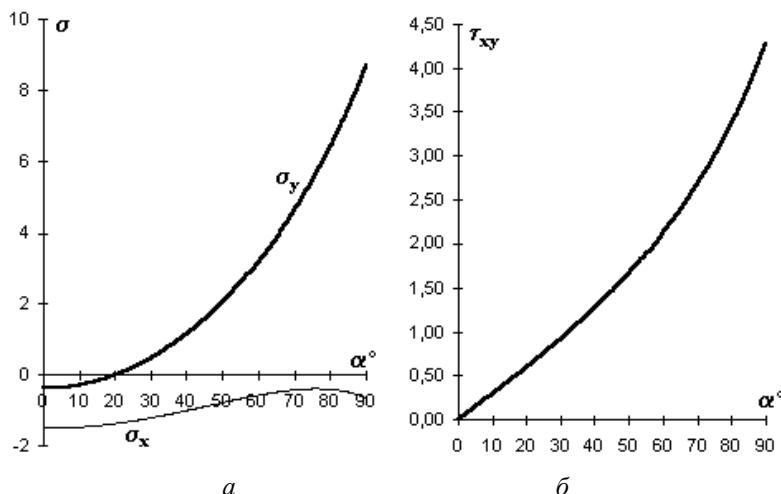


Рис. 4.2. Задача о повороте полосы

a – расчетная схема; *б* – графики изменения нормальных напряжений; *в* – графики изменения касательных напряжений; 1 – при использовании меры скорости изменения напряженного состояния σ ; 2 – то же, σ^j ; 3 – то же, σ^Ω .

$$2 - \text{то же}, \sigma^j; 3 - \text{то же}, \sigma^\Omega.$$

Рис. 4.3. Результаты решения задачи о повороте полосы с использованием коротационной производной Олдройда σ^{Ol} :

a – графики изменения нормальных напряжений;
б – график изменения касательных напряжений.

Для определения величины Ω предлагается следующий порядок вычислений.

1. По найденным приращениям узловых перемещений $\{v\}$ и суммарным перемещениям $\{V\}$ вычисляются компоненты тензора-

градиента движения:

$$\begin{aligned} \{F\} &= \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_{xy} \\ F_{yx} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\Delta} [B_0] \{V\} + \{g\} = \\ &= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} -b_{0i} & -b_{0j} & -b_{0k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{0i} & -c_{0j} & -c_{0k} \\ c_{0i} & c_{0j} & c_{0k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{0i} & b_{0j} & b_{0k} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_{xi} \\ V_{xj} \\ V_{xk} \\ V_{yi} \\ V_{yj} \\ V_{yk} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и скорость изменения компонент тензора-градиента движения:

$$\{\dot{F}\} = \begin{pmatrix} \dot{F}_x \\ \dot{F}_y \\ \dot{F}_{xy} \\ \dot{F}_{yx} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\Delta} [B_0] \{v\} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} -b_{0i} & -b_{0j} & -b_{0k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{0i} & -c_{0j} & -c_{0k} \\ c_{0i} & c_{0j} & c_{0k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{0i} & b_{0j} & b_{0k} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{xi} \\ v_{xj} \\ v_{xk} \\ v_{yi} \\ v_{yj} \\ v_{yk} \end{pmatrix}$$

Здесь элементы матрицы функций формы конечного элемента $[B_0]$ вычисляются через координаты узлов в исходной конфигурации, а вектор $\{V\}$ представляет собой вектор полных узловых смещений из начальной в текущую конфигурацию.

2. Вычисляются компоненты тензора деформаций Грина, главные оси которого совпадают с лагранжевыми осями

$$G_x = F_x^2 + F_{yx}^2;$$

$$G_y = F_{xy}^2 + F_y^2;$$

$$G_{xy} = F_x F_{xy} + F_{yx} F_y,$$

и скорости изменения компонент тензора Грина

$$\dot{G}_x = 2F_x \dot{F}_x + 2F_{yx} \dot{F}_{yx};$$

$$\dot{G}_y = 2F_y \dot{F}_y + 2F_{xy} \dot{F}_{xy};$$

$$\dot{G}_{xy} = F_{xy} \dot{F}_x + F_x \dot{F}_{xy} + F_{yx} \dot{F}_y + F_y \dot{F}_{yx}.$$

3. Вычисляется скорость вращения лагранжевых осей

$$\dot{\beta}_z = \frac{(G_x - G_y) \dot{G}_{xy} - G_{xy} (\dot{G}_x - \dot{G}_y)}{(G_x - G_y)^2 + 4G_{xy}^2}.$$

4. Вычисляются компоненты тензора деформаций Фингера, главные оси которого совпадают с эйлеровыми осями

$$B_x = F_x^2 + F_{xy}^2;$$

$$B_y = F_{yx}^2 + F_y^2;$$

$$B_{xy} = F_x F_{yx} + F_{xy} F_y,$$

и скорости изменения компонент тензора Фингера

$$\dot{B}_x = 2F_x \dot{F}_x + 2F_{xy} \dot{F}_{xy};$$

$$\dot{B}_y = 2F_y \dot{F}_y + 2F_{yx} \dot{F}_{yx};$$

$$\dot{B}_{xy} = F_{yx} \dot{F}_x + F_x \dot{F}_{yx} + F_{xy} \dot{F}_y + F_y \dot{F}_{xy}.$$

5. Вычисляется скорость вращения эйлеровых осей

$$\dot{\beta}_z = \frac{(B_x - B_y) \dot{B}_{xy} - B_{xy} (\dot{B}_x - \dot{B}_y)}{(B_x - B_y)^2 + 4B_{xy}^2}.$$

6. Вычисляется разность скоростей вращения эйлеровых и лагранжевых осей

$$\Omega = \dot{\beta}_z - \dot{\beta}_x.$$

Противоречия в использовании производной σ^Ω проявляются при решении задачи о повороте элемента (см. рис. 4.2, графики 3). В этом случае наблюдается изменение абсолютных значений нормальных напряжений, а касательные напряжения, достигнув пика при повороте на $57,5^\circ$, начинают медленно уменьшаться, не снижаясь до нуля при повороте на 90° . В случае использования деформируемой подвижной системы координат происходит увеличение абсолютных значений нормальных и касательных напряжений (рис. 4.3).

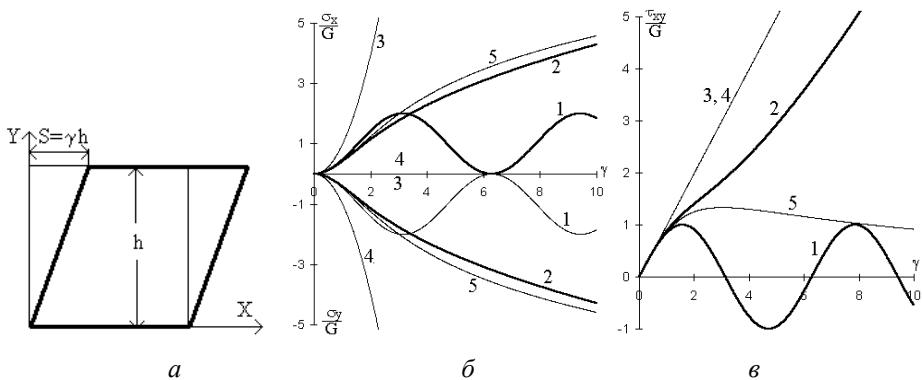


Рис. 4.4. Задача о простом сдвиге полосы

a – расчетная схема; *б* – графики изменения нормальных напряжений;
в – графики изменения касательных напряжений;

1 – по соотношению (1.3) с коротационной производной σ^j ;
 2 – то же, с σ^Ω ; 3 – то же, с σ^{OI} ; 4 – то же, с σ^R ; 5 – по соотношению (1.21).

На примере задачи о простом сдвиге гипоупругой полосы можно показать, что использование деформируемой подвижной системы координат приводит к появлению несимметричных значений нормальных напряжений (см. рис. 4.4, графики 3 для коротационной производной по Олдройду σ^{OI} и графики 4 для коротационной производной по Ривлину σ^R), что означает появление объемных напряжений при отсутствии объемных деформаций.

Так, использование коротационной производной Олдройда σ^{OI} показывает, что касательные напряжения пропорциональны величине сдвига $\tau_{xy} = G\gamma$, горизонтальные компоненты равны $\sigma_x = G\gamma^2$, а вертикальные σ_y отсутствуют. Производная Коттер-Ривлина σ^{CR} покажет аналогичный график изменения касательных напряжений, горизонтальные компоненты будут равны нулю, а вертикальные компоненты будут равны $\sigma_y = -G\gamma^2$. Наконец, Манделем была предложена форма записи коротационной производной, включающей в себя интегрально все описанные выше производные с соответствующими коэффициентами, подбираемыми экспериментально. Заданием коэффициентов можно получить широкий спектр кривых изменения напряжений.

Очевидно, что использование объективных производных при построении определяющих соотношений не должно отражаться на картине изменения напряженно-деформированного состояния, т.е. они должны быть инвариантны по отношению к выбору системы координат. Это утверждение позволяет сделать вывод о том, что определяющие соотношения должны включать не только меру скорости изменения напряженного состояния, но и меру скорости изменения деформи-

рованного состояния. К такому же выводу приходят авторы ряда работ (А.А. Поздеев и др., 1986, П.В. Трусов, 1986). При этом «...скорости изменения напряженного и деформированного состояний должны определяться одним и тем же наблюдателем, т.е. коротационные производные мер напряженного и деформированного состояний должны представлять собой скорости по отношению к одной и той же подвижной системе координат» (А.А.Поздеев и др., 1986).

В таком случае соотношение (4.1) должно быть записано в виде:

$$\sigma^r = C : M^r, \quad (4.17)$$

где M – тензорная мера деформированного состояния, а σ^r и M^r – соответственно, скорость изменения тензора напряжений и тензора деформаций относительно одной и той же подвижной системы координат.

Заметим, что в качестве меры деформированного состояния могут применяться различные меры, обоснованные экспериментально, например, квадратичные меры для объемно несжимаемых сред, используемые для построения соотношений в форме неогуковского потенциала высокоэластичных сред, линейная мера в потенциале Бартенева и т.п.

4.3. Построение модели грунтовой среды для условий больших упругопластических деформаций

4.3.1. Исходные предпосылки и допущения

Особенностью работы грунтов под нагрузкой является способность существенно изменять свой объем, в силу чего для анализа деформированного состояния грунтов предпочтение следует отдать логарифмической мере деформаций Генки, а основное соотношение, описывающее математическую модель среды, представить в виде связи тензора напряжений Коши и тензора деформаций Генки \hat{H} :

$$\sigma = C : \hat{H}, \quad (4.18)$$

или в скоростной форме:

$$\sigma^r = C : \hat{H}^r.$$

Одним из достоинств меры Генки является свойство аддитивности к последовательным нагружениям. Свойству аддитивности автоматически удовлетворяет мера бесконечно малых деформаций, представляющая в главных осях тензора деформаций отношение изменения длины элемента к исходной длине $\varepsilon = dl/l_0$. Тогда при последовательных нагружениях:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_{1+2} = \frac{dl_1}{l_0} + \frac{dl_2}{l_0} = \frac{dl}{l_0}.$$

Мера Генки является единственной аддитивной мерой больших деформаций, представляющая в главных осях тензора Генки:

$$H = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon). \quad (4.19)$$

$$H_1 + H_2 = H_{1+2}$$

Действительно, $H_1 + H_2 = H_{1+2}$, т.к.

$$\begin{aligned} H_1 + H_2 &= \ln \frac{l_0 + dl_1}{l_0} + \ln \frac{l_0 + dl_1 + dl_2}{l_0 + dl_1} = \ln \frac{l_0 + dl_1 + dl_2}{l_0}; \\ H_{1+2} &= \ln \frac{l_0 + dl_1 + dl_2}{l_0}. \end{aligned}$$

Отсюда автоматически вытекает, что конечную объемную деформацию можно определить из выражения, аналогичного выражению (4.19) (С.С. Вялов, 1978):

$$H_V = 3H_{oct} = \ln \frac{l_1}{l_{1(0)}} + \ln \frac{l_2}{l_{2(0)}} + \ln \frac{l_3}{l_{3(0)}} = \ln \left(\frac{l}{l_0} \right)^3 = \ln \frac{V}{V_0}.$$

Во-вторых, при использовании меры Генки в соотношении (4.18) компоненты тензора C имеют четкий физический смысл. Модуль сдвига G представляет собой отношение октаэдрических касательных напряжений и деформаций:

$$G = \frac{\tau_{oct}}{H_{oct}},$$

а модуль объемного сжатия – отношение октаэдрических нормальных напряжений и деформаций:

$$K = \frac{\sigma_{oct}}{H_{oct}}.$$

Наконец, тензор Генки является единственным тензором деформаций, сопряженным с тензором напряжений Коши, т.е. составляющим с ним энергетическую пару.

При анализе деформированного состояния упругопластической среды, работающей в рамках бесконечно малых деформаций, когда

конфигурация элемента незначительно отличается от исходной конфигурации, полный тензор деформаций может быть представлен в виде суммы упругой и пластической составляющих:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p .$$

В случае больших деформаций представление тензора деформаций в виде суммы тензоров упругих и пластических деформаций возможно только для тензора Генки в условиях соосного нагружения среды.

Рассмотрим простейший случай одноосного сжатия среды, испытывающей существенное изменение конфигурации (рис. 4.5). Пусть исходная высота образца равна h_0 . При приложении осевой нагрузки P высота образца изменится до величины h . Полная осевая деформация в соответствии с мерой Генки будет равна:

$$H = \ln \frac{h}{h_0} .$$

Для того чтобы определить величину упругих и остаточных деформаций, необходимо рассмотреть разгруженное состояние образца. После разгрузки высота образца станет равной H_x , упругая осевая деформация будет равна:

$$H_e = \ln \frac{h}{h_x} ,$$

а пластическая деформация:

$$H_p = \ln \frac{h_x}{h_0} .$$

Таким образом, для полной логарифмической деформации при соосном нагружении может быть применен принцип аддитивного разложения:

$$H = \ln \frac{h}{h_0} = \ln \frac{h}{h_x} + \ln \frac{h_x}{h_0} = H_e + H_p . \quad (4.20)$$

Следует повторить, что такое разложение полного тензора возможно только в условиях соосного нагружения, например, в таких как условия раздавливания, девиаторного нагружения и т. п.

Для иных мер деформаций аддитивное разложение исключено. Например, в рассмотренном случае полная осевая деформация по Грину будет равна:

$$G = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{h}{h_0} \right)^2 \right),$$

упругая деформация:

$$G_e = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{h_x}{h_0} \right)^2 \right),$$

остаточная деформация:

$$G_p = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{h_x}{h_0} \right)^2 \right).$$

Легко убедиться, что $G \neq G_e + G_p$.

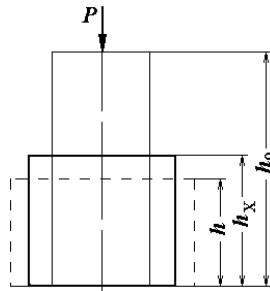


Рис. 4.5. Изменение конфигурации упругопластической среды при одноосном сжатии.

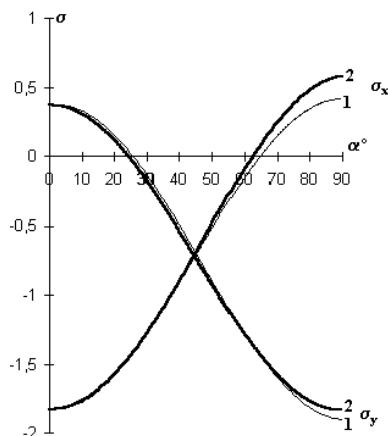


Рис. 4.6. Оценка точности шагового решения задачи о повороте полосы:
1 – с шагом поворота $15''$, 2 – то же, 1° .

Аддитивное разложение (4.20) полного тензора Генки автоматически вытекает из мультиплекативного разложения полного тензора градиента движения (Lee, 1969), представляемого в виде произведения упругой и пластической составляющей:

$$F = F_e \cdot F_p,$$

В рассматриваемом случае соосного нагружения эти значения определяются следующим образом:

$$F = \frac{h}{h_0}; \quad F_e = \frac{h}{h_x}; \quad F_p = \frac{h_x}{h_0}.$$

Численная реализация моделей, в которых используется аддитивное либо мультиплекативное разложение полного тензора деформаций, связана с большими математическими трудностями, в силу чего в настоящей работе принято положение теории пластического течения об аддитивном разложении тензора скорости (приращения) деформаций.

Из основных постулатов теорий пластичности (деформационной теории пластичности и теории пластического течения) следует, что напряжения полностью определяются обратимой частью тензора деформаций и соосны с ней. Следовательно, компоненты тензора напряжений могут вычисляться из соотношения:

$$\sigma = C^e : \hat{H}^e, \quad (4.21)$$

где C^e – тензор упругих свойств среды;

\hat{H}^e – тензор упругих деформаций Генки.

В научно-исследовательских работах мера Генки практически не используется при построении определяющих соотношений ввиду невозможности непосредственного вычисления компонент тензора Генки через перемещения точек среды, поскольку вычисление дробных и отрицательных степеней, а также логарифмических и других функций тензора требует перехода к записи тензора в терминах главных векторов тензора, которые при произвольном нагружении могут поворачиваться относительно исходного положения. Угол наклона главных осей тензора Генки к фиксированным осям может быть вычислен только через углы наклона других тензоров деформаций, с которыми он соосен, например, тензоров Альманси A , Фингера B или тензора правых искажений V .

4.3.2. Конечноэлементная реализация модели среды, испытывающей большие деформации

Поскольку тензор Генки может быть получен только через главные значения, выберем в качестве подвижной системы координат систему главных осей правого тензора искажений с ортонормированным базисом. В качестве коротационной производной примем скорость вращения главных осей правого тензора искажений. В выбранном базисе касательные компоненты тензора деформаций Генки отсутствуют, а скорость изменения компонент тензора деформаций будет равна:

$$\dot{H} = \frac{\dot{V}}{V};$$

или в матричной форме (для условий плоской деформации):

$$\{H'\}^* = \begin{Bmatrix} H'_1 \\ H'_2 \end{Bmatrix}^* = [B']\{u'\}^*,$$

где знак ('*) означает, что компоненты матриц определены в базисе главных осей правого тензора искажений. Матрица производных функций формы в системе главных осей правого тензора искажений имеет вид:

$$[B'] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b'_i & 0 \\ b'_j & 0 \\ b'_k & 0 \\ 0 & c'_i \\ 0 & c'_j \\ 0 & c'_k \end{bmatrix},$$

где компоненты матрицы вычисляются из выражений:

$$b'_i = y'_j - y'_k;$$

$$c'_i = x'_k - x'_j,$$

а координаты узлов элемента в базисе подвижной системы координат вычисляются через координаты относительно неподвижной системы координат в соответствии с правилами преобразования координат:

$$x'_i = x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha;$$

$$y'_k = -x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha,$$

где α – угол наклона главных осей правого тензора искажений к неподвижной системе координат.

Связь между координатами узлов конечного элемента в локальной и глобальной системе координат представляется в виде:

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}.$$

Мощность узловых сил на скоростях перемещений в направлении локальных осей равна:

$$N = \{F'\}\{u'\}^T,$$

а мощность напряжений:

$$N = \int_S \{H'\}^T \{\sigma'\} dS = \int_S \{u'\}^T [B']^T \{\sigma'\} dS.$$

Приравнивая выражения для мощностей и сокращая на $\{u'\}^T$, получим:

$$\{F'\} = \int_S [B']^T \{\sigma'\} dS,$$

или для треугольного элемента первого порядка заменим интеграл умножением на площадь элемента:

$$\{F'\} = [B']^T \{\sigma'\} \Delta$$

Здесь матрица $[B']$ имеет размерность 2×6 . Следует заметить, что вектор $\{\sigma'\}$ представляет компоненты тензора напряжений в главных осях тензора правых искажений, а мощность касательных компонент напряжений равна нулю. Таким образом, в данном случае априори предполагается соосность тензора напряжений и тензора деформаций.

Вектор проекций узловых сил $\{F'\}$ на локальные оси связан с проекциями узловых сил на неподвижные оси $\{F\}$ соотношением:

$$\{F'\} = [C]\{F\},$$

а приращения узловых перемещений в направлении локальных осей связаны с соответствующими перемещениями в направлении фиксированных осей соотношением:

$$\{du'\} = [C]\{du\}.$$

Матрица $[C]$ ортогональна, т.е. $[C]^{-1} = [C]^T$. Тогда:

$$\{\sigma'\} = [C]^T [B']^T \{\sigma'\} \Delta,$$

или в дифференциальной форме:

$$\{dF\} = [C]^T [B']^T \{d\sigma'\} \Delta + d([C]^T [B']^T \Delta) \{\sigma'\}. \quad (4.22)$$

Напряжения связаны с деформациями матрицей упругих свойств:

$$\{\sigma'\} = [D'] \{H'\}, \text{ или } \{d\sigma'\} = [D'] \{dH'\}.$$

Матрица $[D']$ представляет собой матрицу упругих констант, связывающих главные напряжения и главные деформации:

$$[D'] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1-\nu \end{bmatrix}$$

Тогда выражение (4.22) можно переписать в виде:

$$[C]^T [B']^T [D] \{B'\} [C] \{du\} = \{dF\} - d([C]^T [B']^T \Delta) \{\sigma'\}. \quad (4.23)$$

Как показывает численный анализ, система уравнений (4.23), записанная в главных осях тензора деформаций, неустойчива и может быть использована только для решения тестовых задач в упругой постановке с малым количеством конечных элементов.

Для построения системы конечноэлементных уравнений для практического решения задач учетом следующее обстоятельство. Как известно, несмотря на многообразие мер и тензоров деформаций, каждый из них может быть определен через любой другой. Например, главные векторы тензора Генки могут быть определены через главные векторы тензора Альманси в соответствии с выражением:

$$H = \ln \sqrt{1 - 2A},$$

Аналогично, главные компоненты тензора упругих деформаций Генки могут быть определены через главные компоненты тензора упругих деформаций Альманси:

$$H_e = \ln \sqrt{1 - 2A_e}.$$

Выберем в качестве подвижной системы координат ортогональную систему с ортонормированным базисом, вращающуюся со скоростью вращения материальных волокон. Тогда, следуя А.И. Леонову (1973), яуманновскую производную тензора упругих деформаций Альманси \hat{A}^{eJ} можно определить из выражения:

$$\hat{A}^{eJ} + \hat{A}^e \cdot D^e - D^e \cdot \hat{A}^e = D^e, \quad (4.24)$$

где \hat{A}^e – тензор упругих деформаций Альманси;

\hat{A}^{eJ} – скорость изменения тензора упругих деформаций Альманси относительно подвижной системы координат;

$D^e = D - D^p$ – тензор скорости упругих деформаций;

D – тензор скорости деформаций;

D^p – тензор скорости пластических деформаций, определяемый принятым законом пластического течения.

Тогда скорость изменения компонент тензора Альманси \hat{A}^e относительно неподвижной ортогональной системы координат можно получить из соотношения:

$$\hat{A}^{eJ} = \dot{\hat{A}}^e + W \cdot \hat{A}^e - \hat{A}^e \cdot W, \quad (4.25)$$

где W – тензор вихря, компоненты которого определяются из выражения 4.16.

Зная осевые компоненты тензора \hat{A}^e на предыдущем шаге нагружения (или на предыдущий момент времени) и вычислив их приращения $\Delta\hat{A}^e$, можно определить компоненты тензора Альманси на текущий момент:

$$\hat{A}^e(n) = \hat{A}^e(n-1) + \Delta\hat{A}^e. \quad (4.26)$$

Вычислив главные значения тензора \hat{A}^e и угол их наклона к фиксированным осям x_i , найдем главные значения правого тензора упругих искажений:

$$V^e = \sqrt{1 - 2\hat{A}^e}, \quad (4.27)$$

и, соответственно, главные значения тензора Генки:

$$\hat{H}^e = \ln V^e, \quad (4.28)$$

по которым определяются осевые значения \hat{H}_{ij}^e .

Текущие осевые компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}(n)$ определяются из выражения (4.21), а приращения напряжений $\Delta\sigma_{ij}$ на текущем шаге решения равны

$$\Delta\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(n) - \sigma_{ij}(n-1). \quad (4.29)$$

Система конечно-элементных уравнений (4.10) с учетом выражения (4.18) существенно нелинейна и не может быть разрешена непосредственно относительно перемещений таким же образом, как для условий геометрической линейности. Для решения уравнений (4.10) учтем, что одним из основных принципов введения меры деформаций является то

условие, что при малых деформациях любая мера должна равняться тензору бесконечно малых деформаций (Г.В. Виноградов, А.Я. Малкин, 1977). Тогда для малых упругих деформаций выражение (4.10) должно вырождаться в обычное линейное конечно-элементное соотношение:

$$\{\dot{F}\} = [B]^T \{\dot{\sigma}\} \hat{V} = [B]^T [C] [B] \{v\} \hat{V} = [\hat{K}] \{v\}. \quad (4.30)$$

Добавим и вычтем правую часть выражения (4.30) из выражения (4.10):

$$\{F\} = [\hat{K}] \{v\} - [\hat{K}] \{v\} + [B]^T \{\sigma\} \hat{V} + ([B]^T \hat{V})^* \{\sigma\}, \quad (4.31)$$

или

$$[\hat{K}] \{v\} = \{\dot{F}\} + [\hat{K}] \{v\} - [B]^T \{\dot{\sigma}\} \hat{V} - ([B]^T \hat{V})^* \{\sigma\}. \quad (4.32)$$

В данном случае выражение

$$\{\Delta F\} = [\hat{K}] \{v\} - [B]^T \{\dot{\sigma}\} \hat{V} - ([B]^T \hat{V})^* \{\sigma\}$$

может рассматриваться как невязка к системе линейных уравнений

$$[\hat{K}] \{v\} = \{\dot{F}\} + \{\Delta F\}, \quad (4.33)$$

определенная физической и геометрической нелинейностью, и может корректироваться стандартной итерационной процедурой.

Численный анализ для задачи о простом сдвиге гипоупругой среды, выполненный в соответствии с соотношениями (4.31), показывает, что характер изменения нормальных напряжений близок графикам, построенным по выражению (4.13) с коротационной производной σ^Ω (см. рис. 4.2, графики 5); в то же время касательные напряжения после достижения пикового значения стремятся к нулю. Последний эффект отражает вырождение простого сдвига в чистый при $\gamma \rightarrow \infty$, что вполне отвечает механизму такого деформирования и чего невозможно достичь при использовании соотношения (4.3).

При жестком повороте использование соотношения (4.3) с коротационной производной σ' и соотношения (4.18) приводят к идентичному результату.

Как показывают численные эксперименты, в случае, если шаговое нагружение выполнять с поворотами конечных элементов на очередном элементарном шаге нагружения не более чем на $15''$, то достаточно в пределах шага организовывать итерационную процедуру по физической нелинейности с постоянным вектором $([B]^T \hat{V})^* \{\sigma\}$, обеспечивая

удовлетворительную точность решения (рис. 4.6). Если в процессе итерационных циклов фиксируется поворот более чем на $15''$, то производится перестроение сети конечных элементов смещением узлов сетки и продолжается итерационный поиск истинного решения.

4.3.3. Учет развития необратимых деформаций в геотехнических задачах

Рассмотрим вопрос о правомерности использования методов нелинейной теории упругости и деформационной пластичности для решения геометрически нелинейных задач геотехники.

Одним из важнейших принципов при построении математических моделей сплошных сред является принцип «затухающей памяти». Этот принцип может быть сформулирован следующим образом: влияние истории деформаций среды на ее текущее напряженное состояние тем слабее, чем больший промежуток времени их разделяет. Смысл принципа «затухающей памяти» состоит в том, что история деформирования никогда не известна, следовательно, экспериментальную проверку разрабатываемых теорий можно выполнять, игнорируя прошлые деформации.

Принципиальным положением нелинейной теории упругости и деформационной теории пластичности является положение о соосности тензора напряжений и полного тензора деформаций. Предполагается, что использование этих теорий допустимо при соосном нагружении. Можно, однако, показать, что даже при соосном одноразовом нагружении фундамента в основании проявляются геометрически нелинейные эффекты, приводящие к локальным поворотам осей тензоров деформаций.

В качестве простейшего примера, в котором выполняется анализ теорий, учитывающих необратимые деформации в условиях геометрической нелинейности, рассмотрим упруговязкую среду Максвелла, характеризуемую релаксацией напряжений до нуля при постоянной деформации, и выполним численный анализ задачи о простом сдвиге (рис. 4.7). Для упруговязкой среды при соосном нагружении решение может быть достигнуто как методами нелинейной теории упругости, так и методами деформационной теории пластичности. В первом случае в выражении (4.19) модуль сдвига в тензоре C может вычисляться

как $G = G_0 e^{-\frac{t}{\theta}}$, во втором случае компоненты тензора D^p вычисляются из выражения $\frac{dt}{\theta} \frac{\sigma}{G}$.

При решении такой задачи методами теории пластического течения

компоненты тензора D^p также определяются из соотношения $\frac{dt}{\theta} \frac{\sigma}{G}$, однако предполагается, что они соосны с тензором σ (или с тензором упругих деформаций).

Если мгновенно перевести среду из состояния «0» в состояние «I», то траектория изменения, например, касательных напряжений τ_{xy} будет соответствовать графику 1 на рис. 4.8. Если же взять образец с начальной конфигурацией «I» и перевести его в состояние «II», то траектория изменения касательных напряжений должна иметь совершенно аналогичный вид (рис. 4.7, график 2). Начальный угол наклона главных осей ξ_0 тензора напряжений для обеих начальных конфигураций составляет 45° .

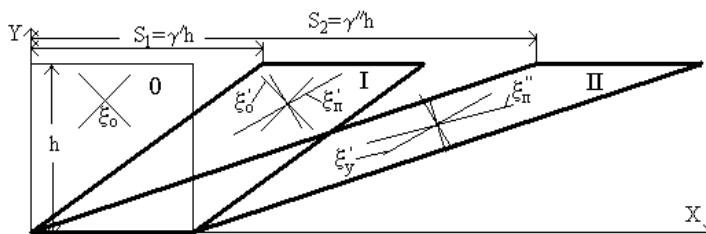


Рис. 4.7. Расчетная схема к задаче о простом сдвиге полосы, обладающей свойствами вязкоупругости.

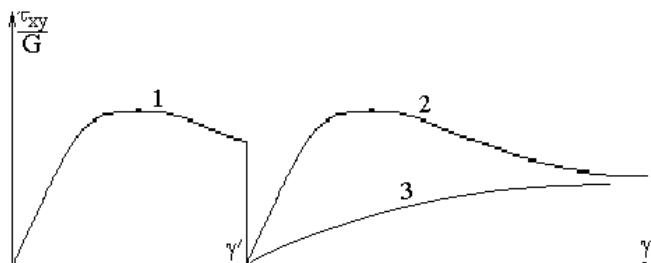


Рис. 4.8. Графики изменения касательных напряжений упруговязкой среды в условиях простого сдвига.
1 – исходное нагружение, 2 – нагружение при допущении о соосности тензора напряжений и тензора упругих деформаций, 3 – нагружение при допущении о соосности тензора напряжений и тензора полных деформаций.

Если принять концепцию о соосности тензора напряжений и тензора полных деформаций, то характер изменения напряжений будет следующим. Мгновенный переход из состояния «0» в состояние «I» будет сопровождаться изменением касательных напряжений в соответствии с

графиком 1. При этом произойдет поворот главных осей тензора как упругих, так и полных деформаций, а следовательно, и тензора напряжений, из положения ξ_0 в положение ξ_1' . Если образец будет оставлен до полной релаксации напряжений, то при неизменном положении осей тензора полных деформаций ξ_1' релаксация напряжений будет сопровождаться поворотом осей тензоров упругих деформаций и напряжений до положения ξ_0' , идентичному положению ξ_0 . Дальнейшее быстрое нагружение до состояния «II» приведет к изменению напряжений в соответствии с графиком 2, повороту осей полных деформаций до положения ξ_2'' , а изменение угла наклона осей тензора напряжений и остаточных деформаций будет происходить до положения ξ_y' по тому же закону, что и переход от ξ_0 до ξ_1' .

При допущении о соосности тензора напряжений и тензора упругих деформаций траектория изменения напряжений при переходе из состояния «I» в состояние «II» определяется кривой 3.

В состояние «I» среду можно перевести из бесконечного множества начальных состояний, следовательно, бесконечным количеством способов будет описываться кривая 3. В результате гипотеза о соосности тензора напряжений и полного тензора деформаций делает невозможным любой анализ изменения напряженного состояния для сред, обладающих свойством накапливать остаточные деформации.

4.3.4. Процедура конечноэлементного решения геометрически нелинейных задач геотехники в условиях больших деформаций

Основные положения предлагаемого подхода можно изложить следующим образом:

1. В качестве кинематической характеристики принимается тензорная мера обратимых деформаций Генки, представляющая собой в главных осях

$$H^e = \ln \frac{l}{l_x}$$

где l и l_x – соответственно, текущая и остаточная после разгрузки длина материального волокна.

2. Для описания напряженного состояния используется тензор напряжений Коши σ , сопряженный с тензором Генки.

3. В соответствии с концепцией теории пластического течения принимается допущение о соосности тензора напряжений σ , тензора упругих деформаций и тензора скорости (приращений) пластических деформаций D^p , а также аддитивное разложение тензора скорости де-

формаций D :

$$D = D^e + D^p,$$

где D^e – тензор скорости упругих деформаций, а компоненты D_{ij} тензора скорости деформаций определяются из выражения:

$$2D_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i};$$

x_i – текущие координаты частицы относительно неподвижной системы координат. При этом компоненты тензора напряжений полностью определяются обратимой частью тензора деформаций.

4. Компоненты тензора скорости пластических деформаций D^p принимаются, в соответствии с правилом Койттера для ассоциированного закона течения, перпендикулярными поверхности пластического потенциала:

$$\frac{\partial F/\partial \sigma}{\partial F/\partial \tau} = \frac{D_v^p}{D_\gamma^p};$$

где D_v^p – скорость необратимых объемных деформаций;

D_γ^p – скорость пластических деформаций формоизменения;

F – уравнение поверхности пластического потенциала, совпадающей с текущей поверхностью нагружения.

5. При любых деформациях сохраняется сплошность грунтового массива.

6. Абсолютная величина диссипации энергии при пластическом течении грунтов вследствие невысокого уровня напряжений в реальных геотехнических задачах ничтожна и практически не сопровождается изменением температуры окружающего грунта, или изменением физико-механических свойств грунта.

Общая схема решения задач упругопластического и упруговязко-пластического деформирования грунтов может быть представлена следующим образом.

1. Формируется матрица жесткости системы для начальной конфигурации сети конечных элементов $[\hat{K}] = [B][C][B]\hat{\Delta}$, аналогичная матрице жесткости системы, составляемой в задачах с бесконечно малыми деформациями.

2. Формируется вектор правой части системы уравнений (4.33) из заданных скоростей приложения (приращений) поверхностных и объемных сил $\{\dot{F}\}$. На первом шаге решения вектор $\{\Delta F\}$ равен нулю.

3. Решается система уравнений (4.32). В результате решения вычисляется вектор скоростей (приращений) перемещений $\{v\}$.

4. Для каждого элемента выполняется следующий цикл операций

4.1. Вычисляется вектор скоростей (приращений) деформаций:

$$\{D\} = [\hat{B}] \{v\}$$

4.2. Вычисляется скорость вращения материальных волокон (вихрь):

$$W = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 - b_1 u_1 - b_2 u_2 - b_3 u_3$$

4.3. Для первого шага вычисляются компоненты вектора скоростей изменения (приращений) напряжений $\{\dot{\sigma}\} = [C][D]$.

4.4. Вычисляются главные значения вектора накопленных напряжений:

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} \left(\sigma_x + \sigma_y + \sqrt{4\tau_{xy}^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2} \right);$$

$$\sigma_{\min} = \frac{1}{2} \left(\sigma_x + \sigma_y - \sqrt{4\tau_{xy}^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2} \right),$$

и угол их наклона к неподвижным осям:

$$\alpha = \arctg \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{\max} - \sigma_y}.$$

4.5. Вычисляются инварианты тензора напряжений σ_0 и τ_i (для условий плоской деформации – плоские инварианты $\sigma_{0\text{пл}}$ и $\tau_{i\text{пл}}$):

$$\sigma_{0\text{пл}} = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2};$$

$$\tau_{i\text{пл}} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}.$$

4.6. В соответствии с принятым законом течения определяются «теоретические» инварианты напряжений σ^T и τ^T , которые должны быть достигнуты в процессе релаксации. Например, в модели идеально упругопластической среды Рейсса-Прандтля с законом равнообъемного течения и предельной поверхностью Мора-Кулона величины σ^T и τ^T будут определяться из выражений:

$$\sigma^T = \sigma_{0\text{пл}};$$

$$\tau^T = C + \sigma^T \operatorname{tg}\varphi.$$

4.7. Вычисляются «теоретические» значения главных напряжений:

$$\sigma_1^T = \sigma^T + \tau^T;$$

$$\sigma_3^T = \sigma^T - \tau^T.$$

4.8. Вычисляются приращения осевых напряжений:

$$d\sigma_{xp} = k \cdot (\sigma_x - (\sigma_1^T \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_3^T \cdot \sin^2 \alpha));$$

$$d\sigma_{yp} = k \cdot (\sigma_y - (\sigma_1^T \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_3^T \cdot \cos^2 \alpha));$$

$$d\tau_{xyp} = k \cdot \left(\tau_{xy} - \frac{\sigma_1^T - \sigma_3^T}{2} \sin(2\alpha) \right).$$

Здесь величина k принимается равной 1 в задачах упругопластичности, или вычисляется как $k = \frac{dt}{\theta}$ в задачах вязкопластического течения.

4.9. Вычисляется вектор скоростей изменения осевых компонент пластических деформаций:

$$D_{xp} = \frac{1}{E} [d\sigma_{xp}(1-v^2) - d\sigma_{yp}v(1+v)];$$

$$D_{yp} = \frac{1}{E} [d\sigma_{yp}(1-v^2) - d\sigma_{xp}v(1+v)];$$

$$D_{xyp} = \frac{1+v}{E} d\tau_{xyp}.$$

4.10. Вычисляются приращения компонент тензора упругих деформаций Альманси:

$$d\hat{A}_x^e = (D_x - D_{xp}) - 2\hat{A}_{xy}^e \cdot W + 2(\hat{A}_x^e(D_x - D_{xp}) + \hat{A}_{xy}^e(D_{xy} - D_{xyp}));$$

$$d\hat{A}_y^e = (D_y - D_{yp}) + 2\hat{A}_{xy}^e \cdot W + 2(\hat{A}_y^e(D_y - D_{yp}) + \hat{A}_{xy}^e(D_{xy} - D_{xyp}));$$

$$d\hat{A}_{xy}^e = (D_{xy} - D_{xyp}) + (\hat{A}_x^e - \hat{A}_y^e) \cdot W + \\ + \hat{A}_{xy}^e(D_x + D_y - D_{xp} - D_{yp}) + (\hat{A}_x^e + \hat{A}_y^e)(D_{xy} - D_{xyp}).$$

4.11. Вычисляются приращения компонент тензорной меры упругих деформаций Альманси:

$$\begin{aligned} d\hat{G}_x^e &= -2\hat{G}_{xy}^e \cdot W - 2(\hat{G}_x^e(D_x - D_{xp}) + \hat{G}_{xy}^e(D_{xy} - D_{xyp})); \\ d\hat{G}_y^e &= 2\hat{G}_{xy}^e \cdot W - 2(\hat{G}_y^e(D_y - D_{yp}) + \hat{G}_{xy}^e(D_{xy} - D_{xyp})); \\ d\hat{G}_{xy}^e &= (\hat{G}_x^e - \hat{G}_y^e) \cdot W + \hat{G}_{xy}^e(D_x + D_y - D_{xp} - D_{yp}) - (\hat{G}_x^e + \hat{G}_y^e)(D_{xy} - D_{xyp}). \end{aligned}$$

4.12. Вычисляются накопленные компоненты тензора упругих деформаций Альманси и тензорной меры упругих деформаций Альманси:

$$\begin{aligned} \{\hat{A}^e(t_n)\} &= \{\hat{A}^e(t_{n-1})\} + \{d\hat{A}^e\}; \\ \{\hat{G}^e(t_n)\} &= \{\hat{G}^e(t_{n-1})\} + \{d\hat{G}^e\}. \end{aligned}$$

4.13. Вычисляются главные значения тензоров \hat{A}^e и \hat{G}^e .

4.14. По главным значениям тензора и тензорной меры упругих деформаций Альманси вычисляются компоненты тензора упругих деформаций Генки:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1^e &= 0,5 \cdot \ln(1 + 2\hat{A}_1^e); \\ \hat{H}_3^e &= 0,5 \cdot \ln(1 + 2\hat{A}_3^e); \\ \hat{H}_1^e &= 0,5 \cdot \ln(\hat{G}_1^e); \\ \hat{H}_3^e &= 0,5 \cdot \ln(\hat{G}_3^e). \end{aligned}$$

Примечание: Вычисление компонент тензора Генки двумя способами позволяет снизить накопление ошибок при шаговом решении задач.

4.15. Вычисляются главные значения тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\hat{H}_1^e(1-\nu) + \hat{H}_2^e\nu]; \\ \sigma_3 &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\hat{H}_2^e(1-\nu) + \hat{H}_1^e\nu]. \end{aligned}$$

4.16. Вычисляются осевые компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha;$$

$$\sigma_y = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_3 \cos^2 \alpha;$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\sin(2\alpha).$$

4.17. Вычисляются приращения компонент тензора напряжений:

$$\{d\sigma\} = \{\sigma(t_n)\} - \{\sigma(t_{n-1})\}.$$

5. Формируется вектор правой части системы уравнений (31) и выполняется решение системы для следующего момента времени или следующей итерации.

В разделе 4.2.3 показано, что соотношение 4.3, в случае использования коротационной производной тензора напряжений по Яуманну, описывает эффект исключения жесткого поворота, однако приводит к противоречащим здравому смыслу результатам при решении задачи о простом сдвиге гипопротной среды. Однако, как известно, грунт не может испытывать большие обратимые деформации. В связи с этим определим условия, в которых допустимо использовать соотношение 4.3 с коротационной производной по Яуманну.

Для этого проанализируем эффекты, возникающие при решении задач вязкопластического течения на примере задачи о простом сдвиге. Пусть среда характеризуется упругим модулем сдвига $G = 1$ МПа, удельным сцеплением $c = 10$ кПа, углом внутреннего трения $\phi = 0^\circ$ и временем релаксации $\theta = 10$ с. На рис. 1.9–1.11 представлены графики зависимости осевых нормальных и касательных напряжений от величины сдвига при различных скоростях нагружения. Из графиков видно, что при высоких скоростях нагружения происходит затухающая во времени осцилляция напряжений, уменьшение скорости нагружения приводит к снижению эффектов осцилляции. Сравнивая решения с использованием меры Генки и с использованием коротационной производной по Яуманну, заметим, что снижение скорости нагружения приводит к сближению решений. Разница в результатах расчетов практически перестает ощущаться при скорости нагружения $\dot{\gamma} < 0,01\theta$. При бесконечно медленном нагружении, что соответствует условиям решения задач теории пластического течения без учета фактора времени, результаты решения задачи по обоим вариантам идентичны.

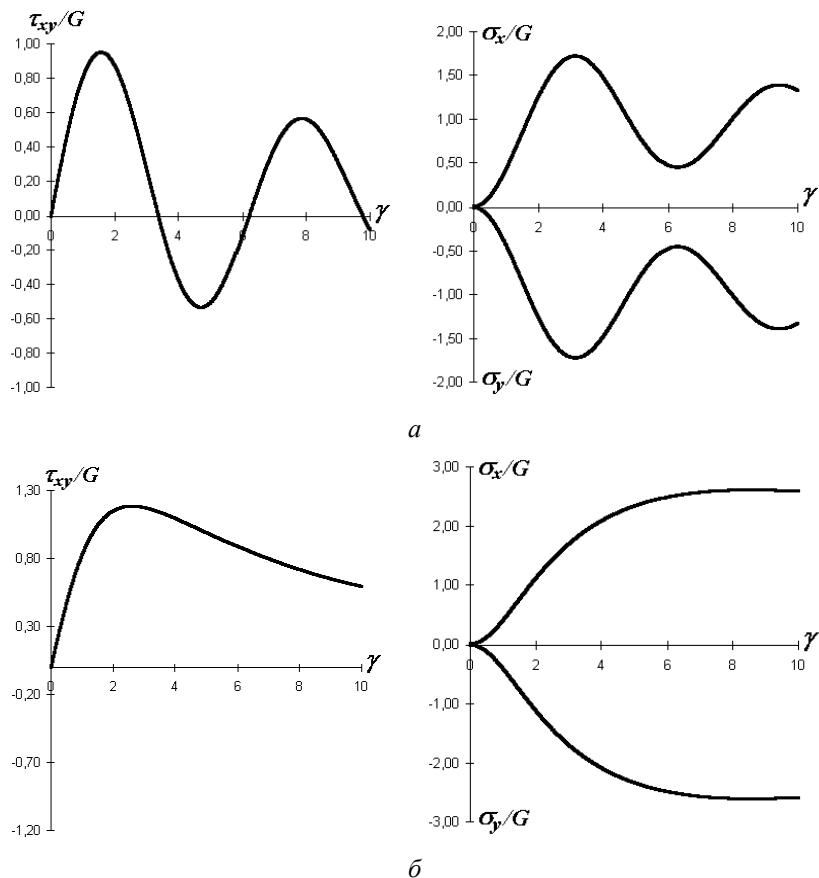


Рис. 4.9. Графики изменения напряжений при сдвиге полосы

с относительной скоростью $\frac{\dot{\gamma}}{\theta} = 1$:

a – по соотношению 4.3; *б* – по соотношению 4.21.

Серия численных экспериментов для полосы, нагружавшейся по различным траекториям, также показала, что при решении задач теории пластического течения для условий больших пластических деформаций использование соотношения 4.3 с коротационной производной по Яуманну и соотношения 4.21 приводят к идентичным результатам.

Таким образом, соотношение 4.3 с производной по Яуманну может быть использовано при решении задач теории пластического течения и задач упруговязкопластичности при малых скоростях нагружения. Следует заметить, что в численной реализации использование соотношения 4.3 предпочтительнее, поскольку содержит меньшее число вычислительных операций и не включает вычисления нелинейных функ-

ций, однако при относительно крупных шагах решения может приводить к осцилляции результатов.

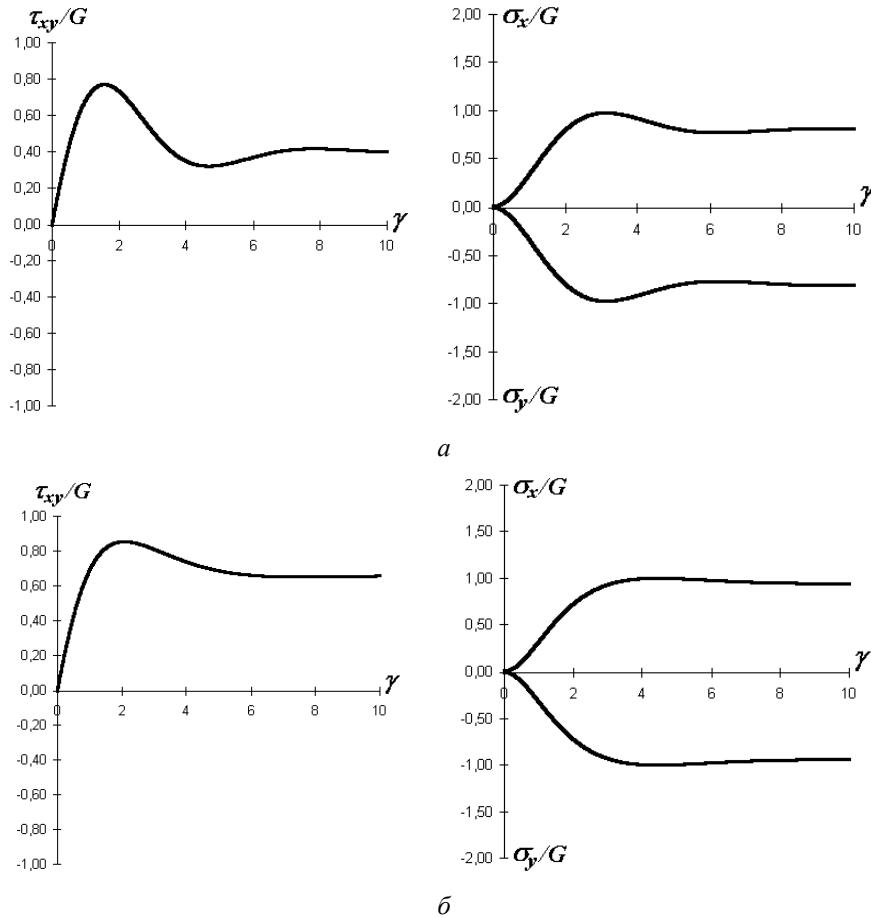


Рис. 4.10. Графики изменения напряжений при сдвиге полосы

с относительной скоростью $\frac{\dot{\gamma}}{\theta} = 0,5$:

a – по соотношению 4.3; *b* – по соотношению 4.21.

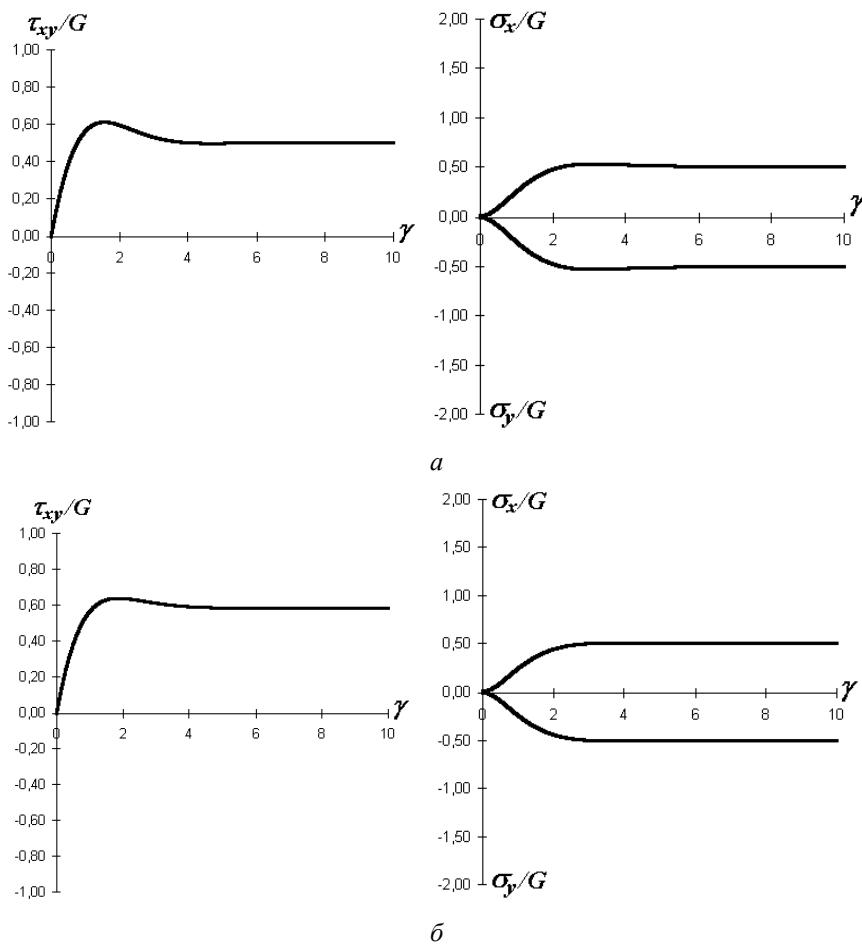


Рис. 4.11. Графики изменения напряжений при сдвиге полосы

$$\text{с относительной скоростью } \frac{\dot{\gamma}}{\theta} = 0,1 :$$

а – по соотношению 4.3; *б* – по соотношению 4.21.

4.3.5. Принципы нерегулярного перестроения конечно-элементных сеток в условиях больших искажений

Численная реализация некоторых геометрически нелинейных задач геотехники показывает, что большие деформации сопровождаются значительным искажением конечноэлементной сетки, а погрешность численного решения, как известно, в существенной степени определя-

ется качеством исходной и текущей сеток, покрывающих расчетную область. В таких задачах геотехники как задача о наплыве грунта в скважину, о вдавливании штампа в грунт, о погружении свай искажение сеток происходит в локальных областях, что вызывает необходимость в нерегулярной перестройки структуры исходной сетки, т.е. такой перестройки, при которой не существует взаимно однозначного отображения исходной и перестроенной сеток, сохраняющего порядок их нумерации. Вопросы нерегулярного перестроения сеток рассматривались, например, в работах А.И. Гулидова и В.М. Фомина (1982), Р.А. Волковой и др. (1982), А.И. Садырина (1985). Апробация рассмотренных в этих работах принципов перестройки сеток и численные исследования позволяют предложить следующие рекомендации по выполнению нерегулярной перестройки сеток.

Мерой искажения треугольного конечного элемента может служить величина I , равная произведению синусов углов треугольника:

$$I = \sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \sin\alpha_3.$$

При решении практических задач критическая величина I , при превышении которой требуется перестройка сетки, может быть принята равной 0,3.

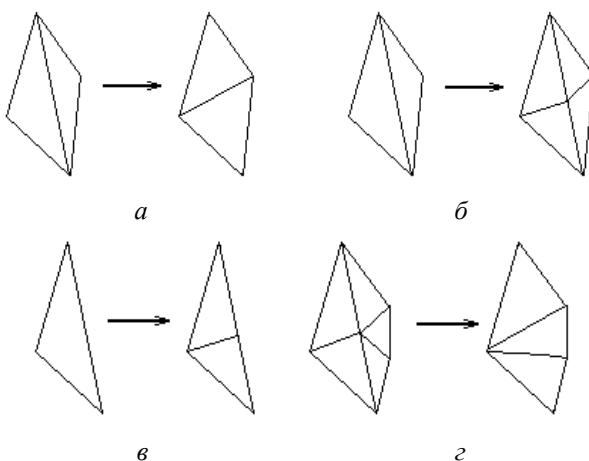


Рис. 4.12. Приемы перестройки сеток
 а – смена диагонали; б – введение промежуточного узла на общей диагонали;
 в – введение промежуточного узла на внешней стороне; г – удаление узла.

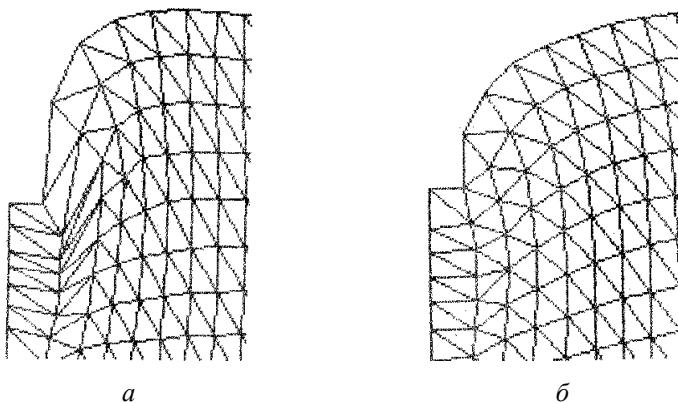


Рис. 4.13. Фрагмент деформированной конечно-элементной сетки при погружении сваи на глубину 1 м
 a – расчет без перестройки сетки; b – расчет с перестройкой сетки.

Эффективными приемами перестроения сеток являются следующие.

1. Смена диагонали (рис. 4.12, a). Этот прием удобен в случае искажения двух соседних элементов, имеющих одинаковые свойства.
2. Введение промежуточного узла на общей диагонали треугольников (рис. 4.12, $б$). Такой прием может быть использован при искажении двух соседних элементов как с одинаковыми, так и с различными свойствами.
3. Введение промежуточного узла на внешней стороне треугольника (рис. 4.12, $в$), если длинная сторона искаженного треугольника принадлежит к внешней границе, т.е. не является общей с другим треугольником.

Предложенная А.И. Садыриным (1985) операция исключения узла (рис. 4.12, $г$) в практической реализации оказалась неэффективной, поскольку, как правило, сетка требует перестройки в местах больших градиентов напряжений, а при исключении узла требуется достаточно сложная процедура интерполяции напряжений в элементах.

На рис. 4.13 представлены фрагменты деформированной конечно-элементной сетки при вдавливании сваи на глубину 1 м при выполнении расчетов без перестройки (рис. 4.13, a) и с промежуточными в процессе погружения перестройками (рис. 4.13, $б$). Из рис. 4.13, a видно, что в области острия сваи происходит значительное искажение сетки конечных элементов и численный анализ дальнейшего погружения сваи без перестройки сетки будет некорректен.

5

РЕШЕНИЕ ГЕОТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С БОЛЬШИМИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

5.1. Решение задачи о вдавливании штампа в грунт

Целью численного моделирования процесса вдавливания штампа в грунт являлась сравнительная оценка эффектов, происходящих в основании при решении задачи в традиционной геометрически линейной постановке и в соответствии с предложенным подходом к решению геометрически нелинейных задач геотехники, а также оценка необходимости учета геометрической нелинейности при расчете осадок фундаментов в пределах давлений по подошве, допускаемых современной нормативной литературой. Такое решение применимо также для оценки проходимости большегрузной техники по грунту без твердого покрытия. Сравнение результатов решения задачи о вдавливании штампа в соответствии с соотношениями теории малых и больших деформаций выполним при различных соотношениях деформационных и прочностных характеристик.

Пусть круглый жесткий штамп с площадью подошвы 900 см^2 ($D=33,85 \text{ см}$) вдавливается с поверхности на 5 см . Характеристики грунта (песок): $\gamma=18 \text{ кН}/\text{м}^3$, $E=2 \text{ МПа}$ и 20 МПа , $c=0$, $\varphi=16^\circ$, 5° и 33° , $\nu=0,25$.

Предельное давление под круглым штампом по В.Г.Березанцеву (Б.И. Далматов, 1988) не зависит от деформационных характеристик и определяется из выражения:

$$p_{u.c} = N_{c.c} \gamma \frac{D}{2} + N_{q.c} \gamma' d + N_{c.c} c .$$

При $c=0$, $\varphi=33^\circ$ – $N_{c.c}=59$, $p_{u.c}=59 \cdot 18 \cdot 0,5 \cdot 0,3385 = 179,7 \text{ кПа}$. Тогда предельная нагрузка равна $N_{u.c}=179,7 \cdot 0,09 = 16,2 \text{ кН} = 1,62 \text{ т}$.

При $c=0$, $\varphi=16,5^\circ$ – $N_{c.c}=4,5$, $p_{u.c}=4,5 \cdot 18 \cdot 0,5 \cdot 0,3385 = 13,7 \text{ кПа}$. Тогда предельная нагрузка равна $N_{u.c}=13,7 \cdot 0,09 = 1,23 \text{ кН} = 0,123 \text{ т}$.

Численное решение задачи выполнялось в осесимметричной постановке. Грунт рассматривался как идеально упруго-пластическая среда

Рейсса-Прандтля, работающая упруго в пределах поверхности, описываемой критерием Мизеса-Шлейхера-Боткина. Закон течения грунта при достижении предельной поверхности напряжений принят равнобъемным без учета эффектов дилатансии и упрочнения-разупрочнения.

Радиус расчетной схемы принят равным 75 см, мощность слоя грунта – 195 см. Задача решалась в два этапа. На первом этапе моделировалось исходное наряженное состояние грунта с шаровым тензором напряжений приложением к узлам конечноэлементной схемы объемных сил от собственного веса грунта. На втором этапе верхним узлам сетки в пределах радиуса штампа шагами по 0,2 мм задавались вертикальные перемещения до достижения осадки штампа 5 см.

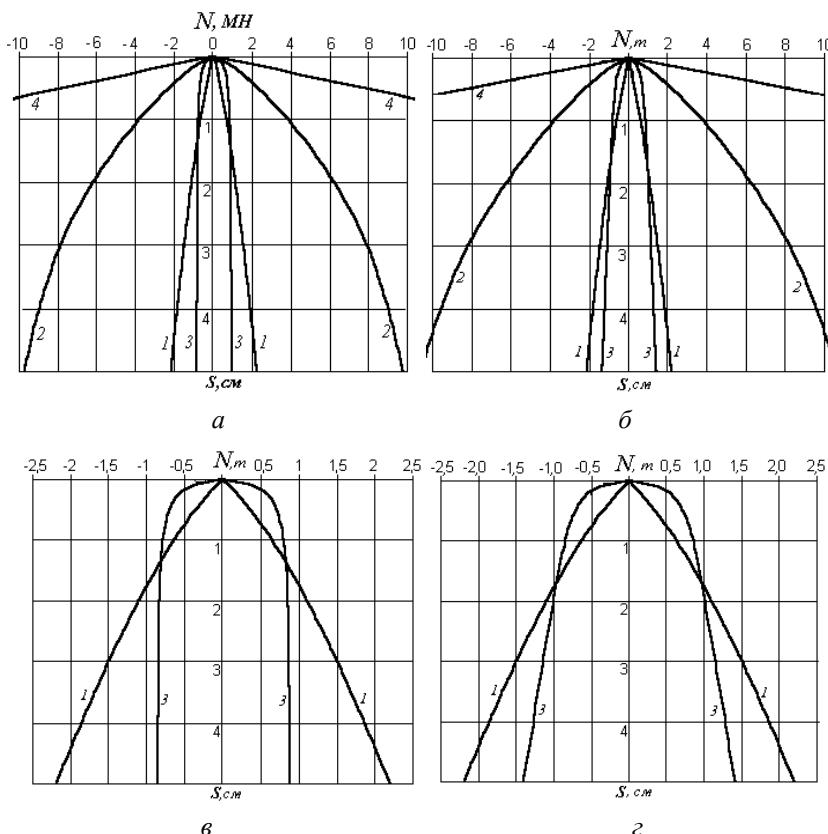


Рис. 5.1. Графики зависимости между реактивными вертикальными усилиями поверху и понизу расчетной области и величиной вертикального перемещения штампа: *a*, *b* – расчет в геометрически линейной постановке;

б, *в* – расчет в геометрически нелинейной постановке;

1 – $E=2$ МПа, $\varphi=33^\circ$; 2 – $E=20$ МПа, $\varphi=33^\circ$; 3 – $E=20$ МПа, $\varphi=16,5^\circ$;

4 – упругое решение $E=20$ МПа.

В процессе решения задачи для оценки равновесия системы вычислялись вертикальные реактивные усилия по верхней и нижней поверхности расчетной схемы. На рис. 5.1 приведены графики зависимости между реактивными вертикальными усилиями поверху и понизу расчетной области и величиной вертикального перемещения штампа при выполнении расчетов с различными характеристиками грунта. На графиках реактивное усилие приведено только от перемещений штампа без учета усилий от веса грунта. Разница между абсолютными значениями усилий понизу и поверху расчетной схемы практически незначительна, что позволяет сделать вывод об удовлетворении требований равновесия и, соответственно, о достоверности результатов численного эксперимента.

Сравнивая результаты расчета с различными характеристиками грунта можно отметить, что характер развития областей предельного состояния, т.е. областей, в которых напряжения в элементах грунта достигают предельного сопротивления сдвигу, зависит не только от прочностных, но и от деформационных свойств грунта. Сравнивая результаты расчета для грунта с одинаковыми прочностными, но различными деформационными характеристиками (рис. 5.2, 1, 2), заметим, что в случае расчета основания с низкой сжимаемостью при рассматриваемой осадке зоны предельного состояния образуют непрерывную поверхность скольжения, выходящую на поверхность, в то время как при высокой сжимаемости поверхности скольжения еще не появляются. Очевидно, что в случае одинаковой сжимаемости, но различных прочностных свойствах при одних и тех же перемещениях штампа объем областей пластических деформаций грунта тем выше, чем ниже сопротивление грунта сдвигу (рис. 5.2, 2, 3).

Таким образом, в рамках теории бесконечно малых перемещений предельная нагрузка будет определяться не только сопротивлением грунта сдвигу, но и его сжимаемостью. На графиках зависимости вертикальных усилий от перемещений штампа для рассматриваемой расчетной схемы провальная осадка штампа явно получена только при механических характеристиках грунта $E=20$ МПа, $\varphi=16,5^\circ$. При этом предельная нагрузка составила 0,82 т, т.е. в 7 раз выше, чем рассчитанная по формуле В.Г. Березанцева ($N_{u,c}=0,123$ т), хотя при нагрузке $N_{u,c}$ уже отмечается существенное отклонение работы грунта от линейной стадии. Усилию 0,123 т в упругом решении соответствует перемещение штампа 0,008 см, а в упругопластическом – 0,03 см, т.е. почти в 4 раза выше, чем в упругом решении.

Эффект влияния деформационных характеристик грунта на величину предельной нагрузки можно объяснить следующим образом. Соотношение В.Г. Березанцева получено для однородного полупростран-

ства и справедливо в случае одинаковых деформационных свойствах среды в любой точке полупространства.

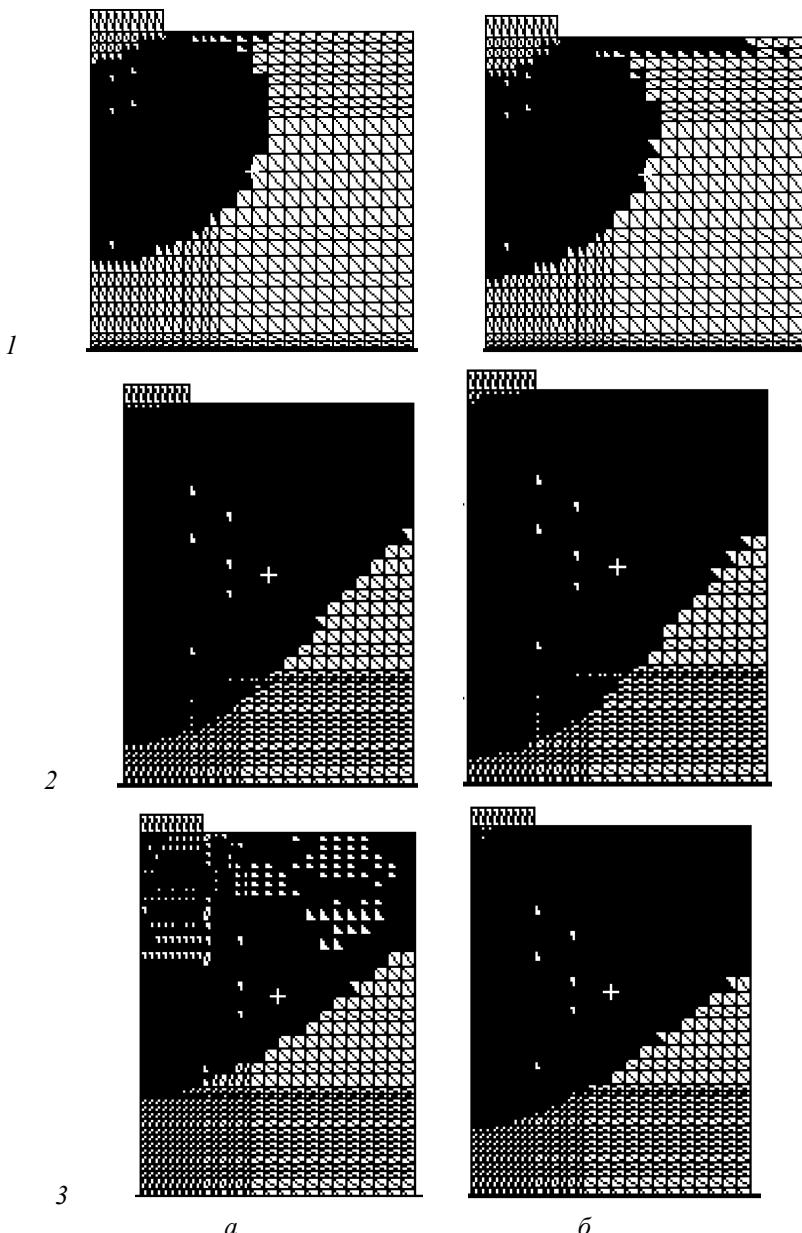


Рис. 5.2. Области предельного состояния грунта по штампом:
a – расчет в геометрически линейной постановке;
б – расчет в геометрически нелинейной постановке;
1 – $E=2$ МПа, $\varphi=33^\circ$; 2 – $E=20$ МПа, $\varphi=33^\circ$; 3 – $E=20$ МПа, $\varphi=16,5^\circ$.

При решении упругопластических задач переход грунта в предельное состояние происходит, прежде всего, в области приложения локальной нагрузки. При этом переход грунта в предельное состояние соответствует снижению секущих деформационных параметров. Следовательно, упругопластическое решение будет соответствовать упругому решению с увеличивающимися по мере удаления от места приложения нагрузки деформационными характеристиками среды. Таким образом, в отличие от задачи о нагружении штампа на однородном линейно деформируемом основании, решение упругопластической задачи приведет к локализации перемещений грунта в верхней части осно-

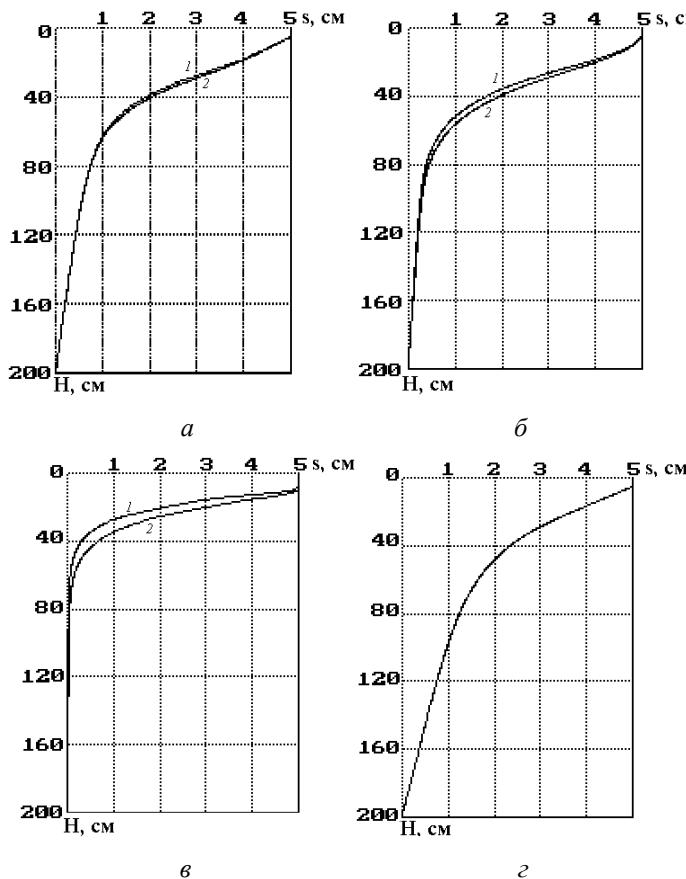


Рис. 5.3. Эпюры вертикальных перемещений грунта по глубине:
 1 – расчет в геометрически линейной постановке;
 2 – расчет в геометрически нелинейной постановке;
 а – $E=2$ МПа, $\phi=33^\circ$; б – $E=20$ МПа, $\phi=33^\circ$;
 в – $E=20$ МПа, $\phi=16,5^\circ$; з – упругое решение ($E=20$ МПа).

вания (рис. 5.3) и снижению перемещений в нижней части, т.е. приводит к условиям работы грунта, близким к условиям работы слоя конечной толщины, работа которого под нагрузкой выгоднее отличается от работы полупространства. Сравнивая эпюры вертикальных перемещений грунта по глубине при расчете с различными деформационными характеристиками (рис. 5.3, а, б), заметим, что при увеличении сжимаемости грунта происходит увеличение мощности толщи, вовлекаемой в процесс деформирования.

Интерес представляет сравнение эпюр перемещений поверхности грунта (рис. 5.4). Расчет основания как линейно деформируемого полупространства показывает, что при осадке штампа 5 см за пределами площади нагружения вертикальные перемещения поверхности направлены только вниз, т.е. образуется только воронка оседания (рис. 5.4, г). На расстоянии $2,25D$ от центра штампа расчетная осадка поверхности составляет 1,22 см, т.е. в 4,1 раза меньше осадки штампа.

Учет пластических деформаций грунта приводит к снижению размеров воронки оседания, причем размеры воронки оседания при одной и той же осадке штампа тем выше, чем выше сжимаемость грунта и прочностные свойства, причем при низкой прочности грунта происходит выпор грунта из-под фундамента.

Как показывают расчеты, учет геометрической нелинейности при нагрузках, находящихся в рамках предельной нагрузки, определяемой методами СНиП, не дает никаких существенных эффектов, т.е. результаты расчетов с учетом и без учета геометрической нелинейности практически одинаковы (рис. 5.1-5.5). Геометрическая нелинейность работы грунта проявляется только в незначительных областях под краями штампа и практически не влияет на интегральную зависимость между перемещениями и усилиями. Таким образом, для расчета осадок фундаментов в пределах допускаемых нагрузок на основание не имеет смысла развивать теории, учитывающие геометрическую нелинейность работы грунта.

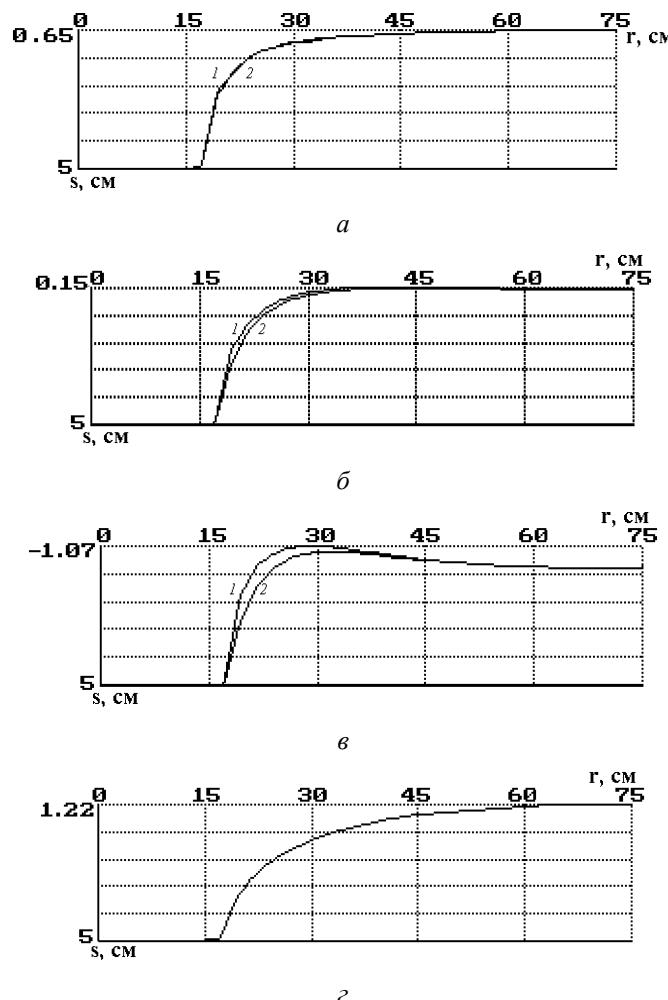


Рис. 5.4. Эпюры вертикальных перемещений поверхности грунта:
 1 – расчет в геометрически линейной постановке;
 2 – расчет в геометрически нелинейной постановке;
a – $E=2$ МПа, $\varphi=33^\circ$; *б* – $E=20$ МПа, $\varphi=33^\circ$; *в* – $E=20$ МПа, $\varphi=16,5^\circ$;
г – упругое решение ($E=20$ МПа).

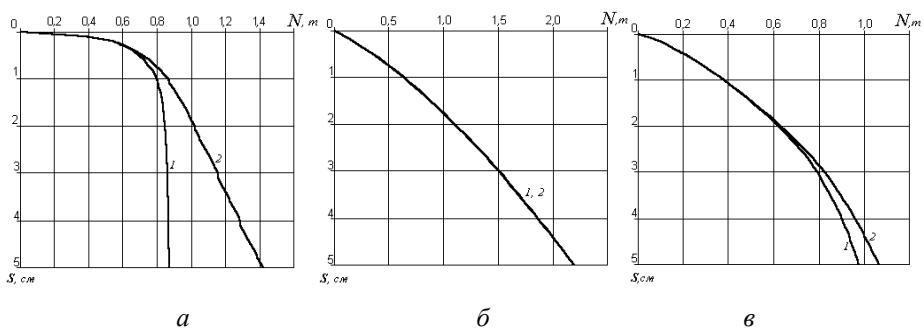


Рис. 5.5. Графики зависимости между реактивными вертикальными усилиями и величиной вертикального перемещения штампа:

1 – расчет в геометрически линейной постановке;

2 – расчет в геометрически нелинейной постановке;

a – $E=20$ МПа, $\varphi=16,5^\circ$; *б* – $E=2$ МПа, $\varphi=33^\circ$; *в* – $E=20$ МПа, $\varphi=33^\circ$.

Разность решений по геометрически линейным и нелинейным соотношениям проявляется при обширном развитии областей предельного состояния, причем эта разница при одной и той же величине осадки тем выше, чем меньше сжимаемость и прочностные свойства грунта. При учете в расчетах геометрической нелинейности в деформационный процесс вовлекается большая толща грунта по глубине, что отражает эффект погружения штампа в грунт (см. рис. 5.5-2.5). При любом уровне нагрузки исключается провальная осадка, т.е. в процессе погружения штампа в грунт при любой величине вдавливания устанавливается равновесное состояние основания, которому однозначно соответствует определенная вертикальная нагрузка.

Можно нагляднее продемонстрировать эффекты учета геометрической нелинейности при вдавливании штампа на большую глубину. Пусть штамп диаметром 33,85 см вдавливается в грунт, имеющий механические характеристики $E=200$ кг/см², $c=0$, $\varphi=16,5^\circ$, на глубину 40 см. Результаты решения задачи с использованием геометрически линейных и геометрически нелинейных соотношений приведены на рис. 5.6-5.9. Сравнение графиков зависимости перемещения штампа от вертикального усилия (рис. 5.6) показывает, что после достижения нагрузки на штамп 0,81 т по традиционному методу расчета в геометрически линейной постановке происходит провальная осадка штампа с постоянной нагрузкой, в то время как расчет с учетом геометрической нелинейности позволяет описывать устойчивое состояние основания при любом уровне нагрузки.

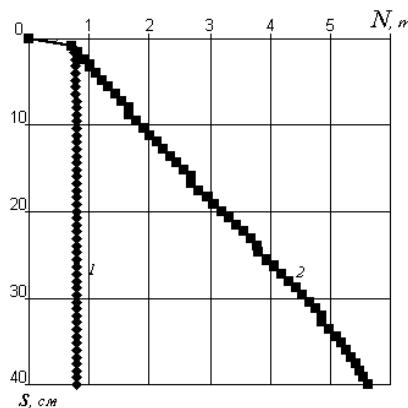


Рис. 5.6. Графики зависимости между реактивным вертикальным усилием и величиной вдавливания штампа в песчаный грунт:
1 – расчет в геометрически линейной постановке;
2 – расчет в геометрически нелинейной постановке.

В процессе вдавливания штампа, согласно расчету по геометрически линейным соотношениям, деформации грунта локализуются на глубине до 40 см и при дальнейшем вдавливании штампа глубина сжимаемой толщи не изменяется (рис. 5.7,а). Учет геометрически нелинейных эффектов позволяет описывать процесс движения штампа в среде и, следовательно, изменение мощности толщи, испытывающей деформации (рис. 5.7,б). При погружении штампа на 40 см расчетная мощность сжимаемой толщи ниже текущего уровня подошвы штампа составила около 40 см, а суммарная мощность толщи ниже отметки дневной поверхности – 80 см, т.е. в 2 раза выше, чем по расчету с использованием геометрически линейных соотношений.

На рис. 5.8,а,б приведены траектории движения узлов конечноэлементной сетки, имитирующие движение частиц грунта по мере вдавливания штампа, а на рис. 5.8,в – траектории движения частиц по опытам проф. В.И. Курдюмова (Б.Д. Васильев, 1937). Движение частиц грунта в процессе вдавливания штампа, согласно расчету по геометрически линейным соотношениям, происходит в небольшой области под штампом (рис. 5.8,а), причем при нагрузках, превышающих предельную нагрузку на основание, эта область остается неизменной независимо от глубины вдавливания штампа. Расчет по геометрически нелинейным соотношениям позволил установить, что при небольших нагрузках движение грунта направлено преимущественно вниз, а по мере погружения штампа зона движения частиц захватывает все большую область как по глубине, так и в стороны от штампа (рис. 5.8,б). Направление движения частиц выше текущего положения подошвы

штампа может быть направлено вверх, а у поверхности и в сторону штампа. Такой характер движения частиц грунта опытами многих исследователей, начиная с опытов проф. В.И. Курдюмова (рис. 5.8,*в*).

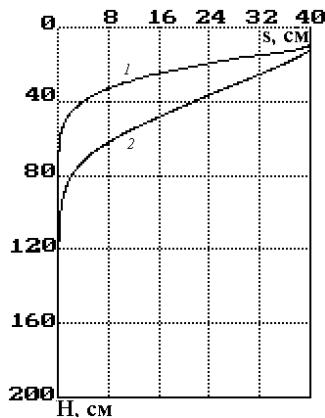


Рис. 5.7. Эпюры вертикальных перемещений грунта по глубине при вдавливании штампа:

1 – расчет в геометрически линейной постановке;
2 – расчет в геометрически нелинейной постановке.

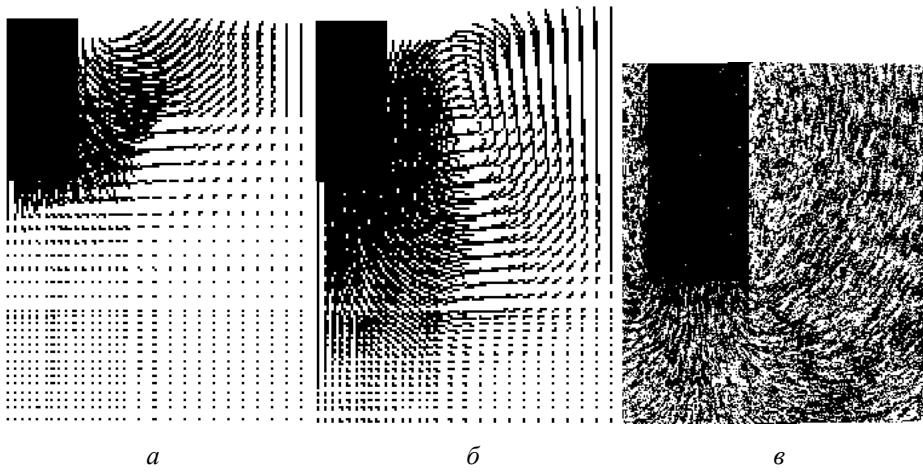


Рис. 5.8 . Траектории движения частиц грунта при вдавливании штампа (фрагмент): *a* – расчет в геометрически линейной постановке;
б – расчет в геометрически нелинейной постановке;
в – опыт проф. В.И. Курдюмова.

Расчет с использованием геометрически линейных соотношений для условий больших деформаций и смещений грунта приводит к появлению относительных деформаций сжатия, превышающих единицу, что означает «выворачивание наизнанку» сетки конечных элементов под штампом, что исключено в случае использования геометрически нелинейных соотношений (рис. 5.9).

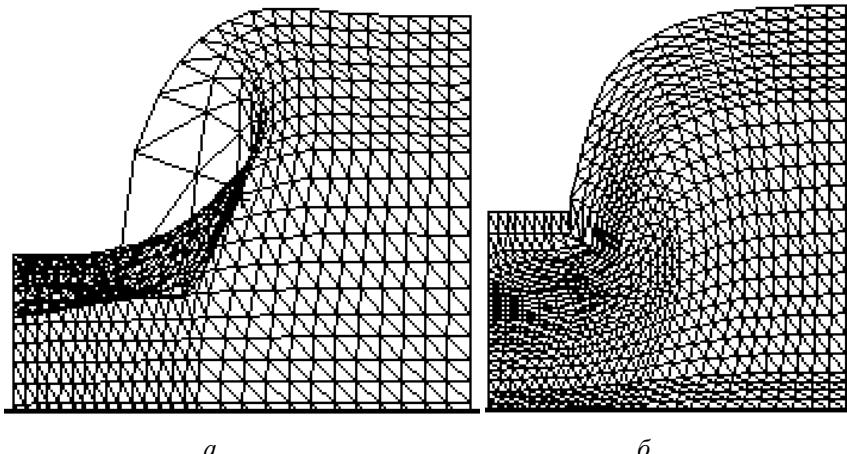


Рис. 5.9. Искажение конечноэлементной сетки при вдавливании штампа в грунт (фрагмент): *а* – расчет в геометрически линейной постановке; *б* – расчет в геометрически нелинейной постановке.

Рассмотрим особенности работы глинистого грунта при быстром вдавливании штампа. В этом случае грунт не успевает уплотниться, поэтому сопротивление сдвигу практически не увеличивается и угол внутреннего трения будет близок к нулю. Рассмотрим решение задачи при характеристиках грунта $E=40$ МПа, $\gamma=18$ кН/м³, $c=15$ кПа, $\varphi=0^\circ$. Результаты численного решения приведены на рис. 5.10. Предельное давление на основание по А.Ю. Ишлинскому (Б.И. Далматов, 1988) равно:

$$p_{u,c} = 5,7c + \gamma'd = 5,7 \cdot 15 = 85,5 \text{ кПа},$$

а предельная нагрузка $N_{u,c}=85,5 \cdot 0,09=7,7$ кН=0,77 т.

По расчету МКЭ предельная нагрузка составила около 1,2 т (рис. 5.10,*б*). Таким образом, для глинистого грунта разница между предельной нагрузкой, рассчитанной аналитическим методом и полученной численным расчетом, оказывается меньше, чем для песчаного грунта, что может быть связано с вовлечением в деформационный процесс большей толщи грунта (рис. 5.10,*в*) и, следовательно, более плавным изменением секущих деформационных параметров грунта.

Анализируя результаты решения задачи, можно отметить, что при одних и тех же характеристиках сжимаемости и нагрузках свыше предельных вдавливание штампа в глинистый грунт сопровождается меньшим приращением усилия вдавливания по сравнению с вариантом вдавливания в песчаный слой. Для песчаного грунта приращение усилия на 1 см вдавливания составило 0,12 т/см, а для глинистого – 0,053 т/см.

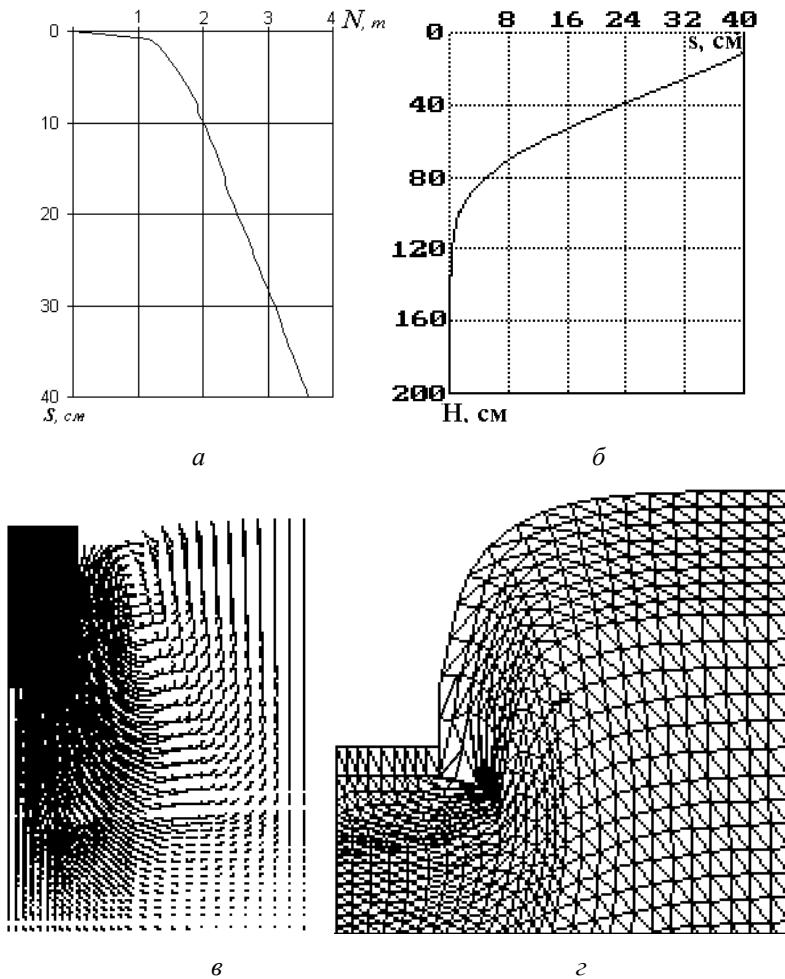


Рис. 5.10. Результаты решения задачи о вдавливании штампа в глинистый грунт:
а – график зависимости между реактивным вертикальным усилием и величиной вдавливания штампа; *б* – эпюра вертикальных перемещений грунта по глубине; *в* – траектории движения частиц грунта (фрагмент);
г – искажение конечноэлементной сетки (фрагмент).

Анализ траекторий движения частиц грунта (рис. 5.10,*г*) и искажения сетки конечных элементов (рис. 5.10,*ж*) показывает, что процесс вдавливания штампа в глинистый грунт вовлекает в работу в меньшей степени окружающий массив и в большей степени – грунт под штампом, чем вдавливание в песчаный грунт. Таким образом, деформации глинистого грунта в большей степени оказываются локализованными непосредственно вдоль штампа, и, следовательно, влияние, например, вдавливания свай в глинистый грунт на окружающую застройку будет меньшим, чем в песчаный.

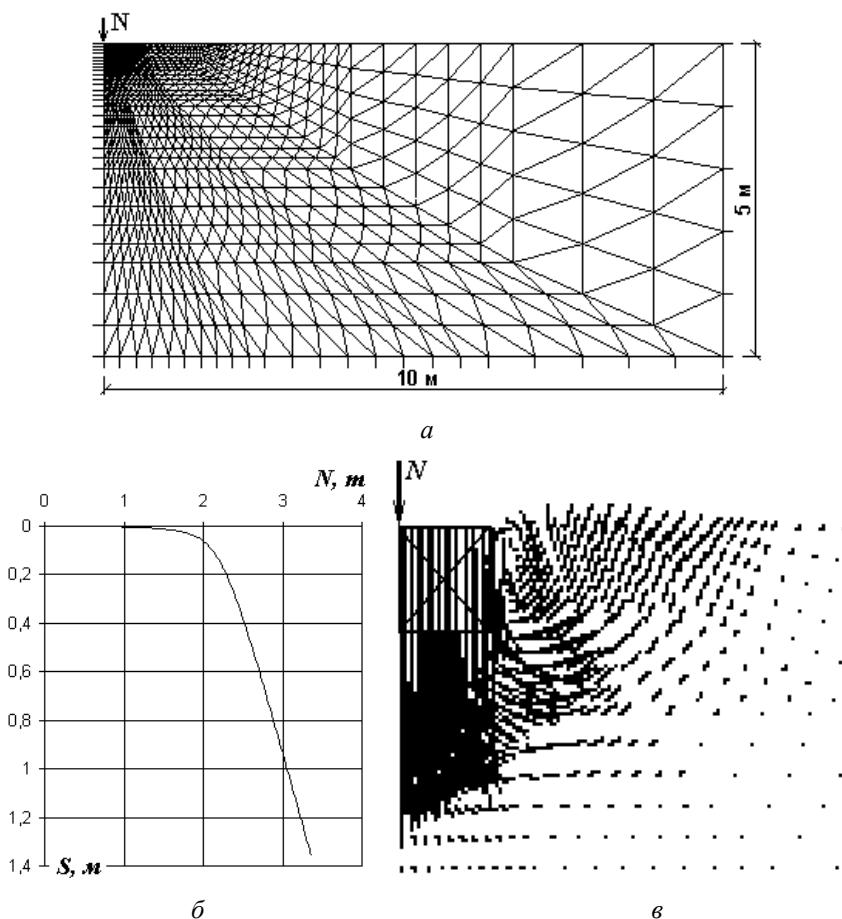


Рис. 5.11. Вдавливание в глинистый грунт штампа диаметром 1 м:
а – расчетная схема к задаче о вдавливании штампа; *б* – график зависимости осадки вдавливания штампа от вертикального усилия; *в* – траектории движения частиц грунта при вдавливании штампа (фрагмент).

Необходимо отметить следующее. При выполнении расчетов отношение радиуса площади нагружения к радиусу расчетной области составляло около 4,45. Таким образом, при больших смещениях грунта на результаты решения оказывают влияние граничные условия задачи. Очевидно, что размеры области выпора будут превышать размеры расчетной схемы.

Для оценки размеров областей выпора размеры расчетной области должны превышать размеры областей предельного состояния. С этой целью рассмотрим процесс быстрого вдавливания в глинистый грунт круглого штампа радиусом 0,5 м и глубиной заложения 0,5 м. Радиус расчетной области принят равным 10 м (рис. 5.11,*a*). Задача решалась в усилиях, т.е. к штампу шагами прикладывалась нагрузка. В области штампа сетка конечных элементов сгущалась до линейных размеров 3 см. Характеристики грунта приняты следующими грунта $E=40$ МПа, $\gamma=18$ кН/м³, $c=15$ кПа, $\varphi=0^\circ$. Результаты решения приведены на рис. 5.11. При больших размерах расчетной области явно получен выпор грунта из-под фундамента.

В рассматриваемом случае также установлено, что при небольших нагрузках движение частиц грунта направлено вниз и в стороны, при этом осадка штампа сопровождается образованием воронки оседания. При дальнейшем нагружении осадка сопровождается выдавливанием грунта в стороны и вверх и вместо воронки оседания образуется область выпора грунта. Выпор грунта начинается в непосредственной близости от фундамента, а расчетный радиус зоны выпора составил 4 м.

5.2. Оценка условий наплыва грунта в скважину при устройстве буронабивных свай под защитой обсадной трубы

5.2.1. Постановка задачи

При наличии в основании значительной толщи слабых глинистых отложений одним из наиболее щадящих по отношению к примыкающей застройке является вариант фундаментов на буровых сваях, прорезающих слабые грунты и опирающихся на плотные подстилающие отложения. В настоящее время имеется геотехническое оборудование, позволяющее устраивать сваи большого диаметра (от 450 до 1200 мм). Такое оборудование применялось, например, в Санкт-Петербурге при строительстве гостиницы на Невском проспекте и жилого комплекса на Малой Дворянской улице. В обоих случаях в процессе бурения скважин под сваи соседние здания получили аварийные деформации.

По поводу причин этих аварий имеется множество мнений, из которых приведем лишь два полярных. Первое: причиной развития аварийных осадок соседних зданий являлись динамические воздействия при устройстве свай, вызвавшие разрушение структуры и уплотнение слабого глинистого основания. Второе: осадки произошли вследствие наплыивания слабого грунта в скважину и его выработки, в результате чего объем извлеченного грунта оказался существенно большим, чем объем скважины.

Второе утверждение представляется более убедительным, если к тому же принять во внимание способность слабых глинистых грунтов снижать при перемятии прочностные свойства и увеличить сжимаемость.

Факт наполнения скважины с забоя грунтом известен из опыта выполнения геологоразведочных работ. В процессе бурения скважин при повторном погружении шнека либо желонки забоя всегда оказывается выше, чем отметка низа рабочего органа при выполнении предыдущей операции разработки грунта. Факты заполнения скважины грунтом при вибропогружении свай-оболочек диаметром 1200 мм описаны в статье В.В. Беленькой, Е.М. Перлея и др. (1973). Разработка мягкопластичных супесей и суглинков без оставления грунтового сердечника в полости свай-оболочки длиной 40 м привела к резкому подъему грунта на высоту до 32 м, т.е. практически до верха свай. Разработка грунта с оставлением грунтового сердечника в полости свай-оболочки длиной 32 м привела к меньшему подъему грунта (на высоту до 18 м). Потеря устойчивости забоя скважины при разработке грунта привела также к снижению несущей способности свай. Несущая способность свай-оболочки длиной 32 м составила 610 т, тогда как для свай-оболочки длиной 40 м – 380 т.

Геотехническое обоснование возможности использования буровых свай большого диаметра в слабых глинистых грунтах было затруднено отсутствием необходимого расчетного аппарата. Оценка условий за-плывания скважины и прогноз изменения напряженно-деформированного состояния грунта не могут быть выполнены на основе использования традиционной в механике грунтов меры бесконечно малых деформаций при игнорировании кинематики движения материальных частиц. Для моделирования процесса наплыивания грунта в скважину определяющие соотношения должны быть построены с использованием мер больших деформаций.

При проведении работ по устройству буровых свай с разработкой слабого глинистого грунта под защитой обсадной трубы грунт, находящийся в области забоя скважины, подвергается разгрузке вследствие снижения природного давления (рис. 5.12). Уменьшение давления

приведет к подъему дна забоя и при некоторой интенсивности противодавления $\sigma_z^{ocm}/\sigma_{zg}$ может вызвать наплыв грунта в скважину. Под противодавлением σ_z^{ocm} при этом подразумевается некоторая суммарная величина давления (рис. 5.13), слагаемая из веса раствора G_p , под защитой которого выполняется бурение скважины; веса грунтового сердечника G_n , оставляемого в скважине при проходке; трения F_{mp} грунтового сердечника и заплывающего грунта по стенкам обсадной трубы; а также силы налипания F_l грунта к стенкам.

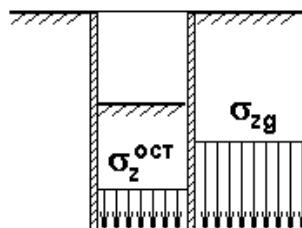


Рис. 5.12. Схема статических нагрузок при разработке грунта в скважине.

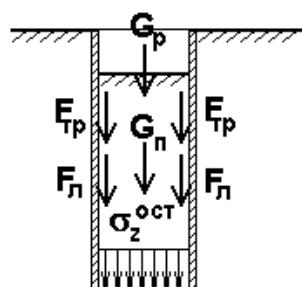


Рис. 5.13. Схема усилий, создающих противодавление наплыву грунта.

Очевидно, что наплывающий грунт будет разрабатываться рабочими органами буровых машин и, следовательно, объем выбиравшегося из скважины грунта превысит объем самой скважины. Потери объема грунта сверх объема скважины неизбежно должны привести к развитию областей предельного состояния грунта вокруг выработки. Это обстоятельство может обусловить развитие дополнительных осадок прилегающих зданий вследствие проявления эффектов прямой подработки. Высказанные положения подтверждает негативный опыт устройства буровых свай в условиях слабых грунтов Санкт-Петербурга.

5.2.2. Численный анализ устойчивости забоя скважины

В соответствии с принятыми предпосылками выполним численную оценку влияния на устойчивость грунта в забое скважины таких факторов как удельное сцепление « c » в интервале от 2 до 20 кПа, диаметра обсадной трубы d от 120 до 600 мм, величины вертикального природного давления грунта σ_{zg} на отметке забоя от 0,1 до 0,4 МПа (что соответствует различным глубинам погружения обсадной трубы) при постоянных характеристиках грунта, характерных для балтийских глинистых отложений: $E_{разр}=40$ МПа, $\gamma=19$ кН/м³.

Для определения границ упругой и пластической работы грунта при выполнении технологических операций учтем следующее обстоятельство. Как известно, на стадии выполнения геотехнических работ в глинистых грунтах консолидационные процессы отсутствуют и, следовательно, уплотнение практически исключено, а сопротивление грунта сдвигу τ_{np} включает в себя только слагаемое « c », соответствующее удельному сцеплению, определяемому из недренированных испытаний. В инвариантах тензора напряжений τ_{oct} и σ_{oct} для осесимметричных условий нагружения ограничим область упругой работы грунта $OABC$ (рис. 5.14) двумя предельными поверхностями, совпадающими с поверхностями пластического потенциала: поверхностью CD , описываемую уравнением $\tau_{oct}=c_{oct}$, и поверхностью BC с уравнением $\sigma_{oct} \leq c_{oct}/5$.

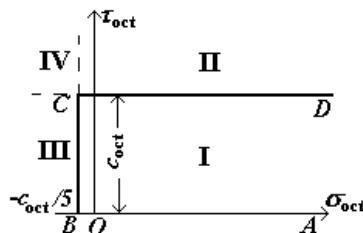


Рис. 5.14. Упругопластическая модель среды в инвариантах тензора напряжений для моделирования технологических ситуаций на водонасыщенных глинистых грунтах.

Расчетная схема данной задачи, выполняемой для осесимметричных условий, представлена на рис. 5.15. Радиус расчетной области принят равным 10 м, а высота 5 м. При выполнении численного эксперимента грунт выше забоя скважины считался абсолютно гибким, в силу чего действие вышележащих слоев заменено эквивалентным вертикальным давлением, равным природному σ_{zg} .

На первом этапе решения воспроизводилось природное напряженное состояние, формирующее шаровой тензор напряжений. На втором этапе верхней узловой точке с координатой, равной радиусу обсадной трубы $r_{обс}$, задавалось жесткое ограничение в вертикальном и горизонтальном направлениях, а в верхних узловых точках, находящихся в пределах радиуса $r_{обс}$ производилось пошаговое снижение усилий от природных σ_{zg} до нуля.

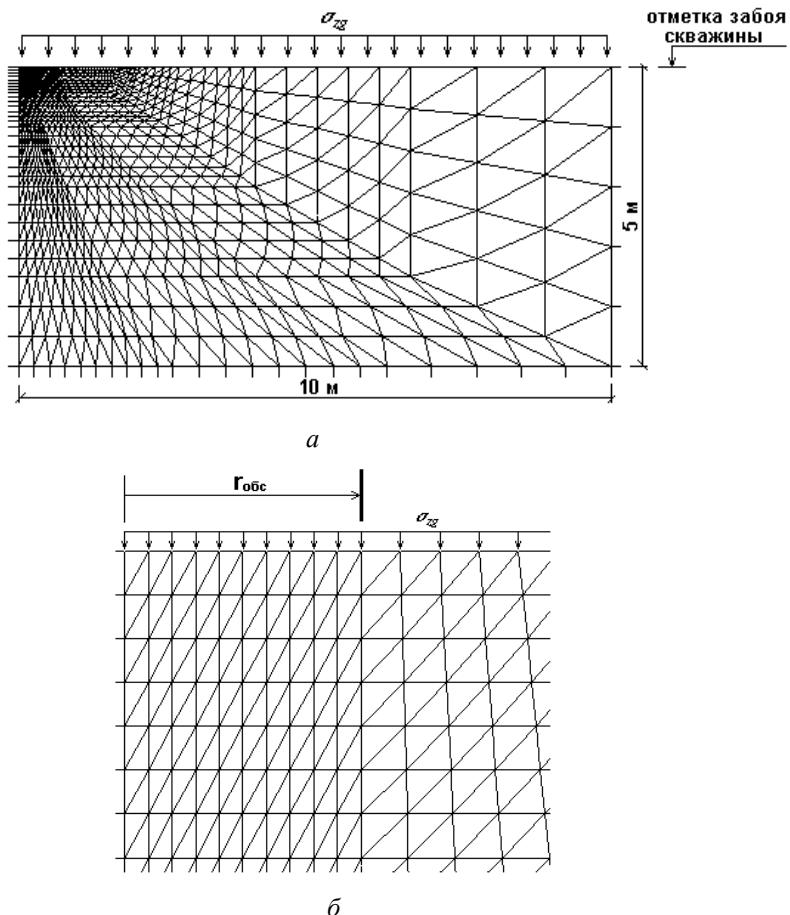


Рис. 5.15. Конечноэлементная сетка к расчетной оценке устойчивости забоя скважины:
 a – полная расчетная схема; b – укрупненный фрагмент расчетной схемы в области обреза обсадной трубы.

На рис. 5.16 представлены характерные графики зависимости высоты подъема грунтового сердечника от степени снижения вертикального давления на грунт в забое скважины для некоторых сочетаний параметров $\langle c \rangle$, $\langle \sigma_{zg} \rangle$ и $\langle d \rangle$. Из этих графиков можно выделить три семейства. Для первого семейства (тип графиков 1 и 2), соответствующего большому диаметру обсадной трубы, малому значению удельного сцепления и значительному природному давлению, можно выделить три характерных участка:

- 1) горизонтальный, практически совпадающий с осью абсцисс и отвечающий устойчивому состоянию грунта в забое;
- 2) криволинейный, отвечающий потере устойчивости забоя скважины;
- 3) прямолинейный, близкий к вертикальному, соответствующий интенсивному подтоку грунта в скважину.

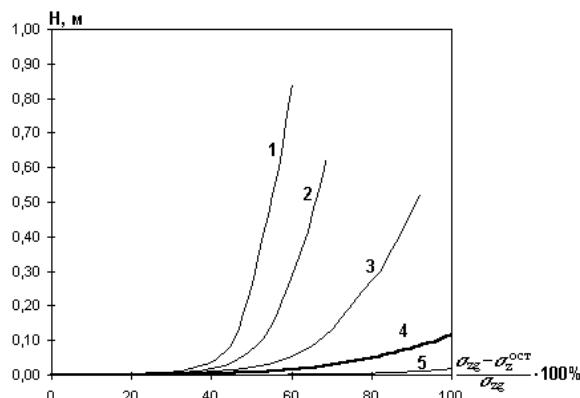


Рис. 5.16. Графики зависимости высоты подъема грунтового сердечника от степени снижения вертикального давления на грунт в забое скважины.

Работа грунта для третьего участка иллюстрируется рисунком 5.17, на котором приведены характерные траектории движения узлов конечноэлементной сетки при снижении давления на забой скважины, что имитирует смещение частиц грунта. Искажение сетки конечных элементов соответствует процессу образования грунтового сердечника (рис. 5.18). Развитие пластических зон в массиве грунта (рис. 5.19) при этом распространяется на расстояние до $8r_{\text{обс}}$ и на глубину до $10r_{\text{обс}}$.

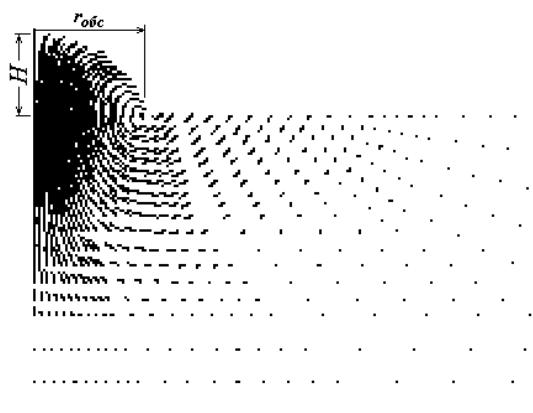


Рис. 5.17. Характерные траектории движения частиц грунта при образовании грунтового сердечника (фрагмент).

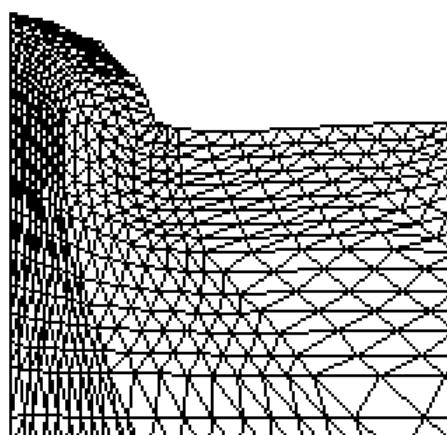


Рис. 5.18. Искажение конечноэлементной сетки при затекании грунта в обсадную трубу (фрагмент).

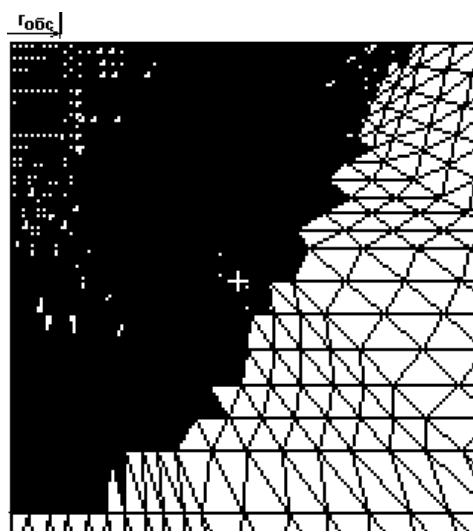


Рис. 5.19. Развитие областей предельного состояния грунта в области обреза обсадной трубы при затекании грунта в трубу.

На графиках второго семейства (тип графиков 3 и 4) отсутствует или слабо выражен третий участок. Наконец, при малом диаметре обсадной трубы, большом удельном сцеплении и небольшом природном давлении, графики характеризуются только устойчивым состоянием грунта (график 5).

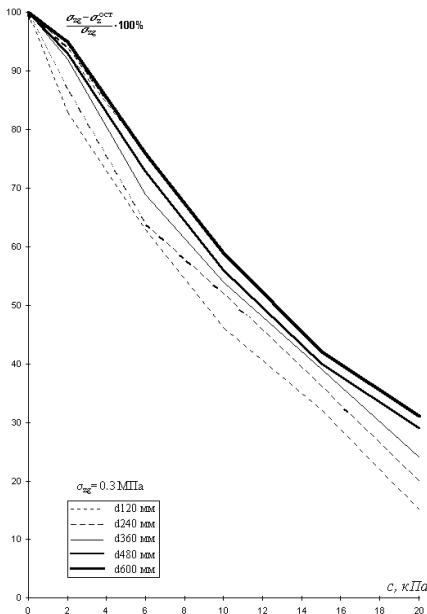


Рис. 5.20. Графики зависимости «противодавления» (%), требуемого для обеспечения устойчивости забоя скважины, от удельного сцепления c при величине природного давления на отметке забоя $\sigma_{zg}=0,3$ МПа.

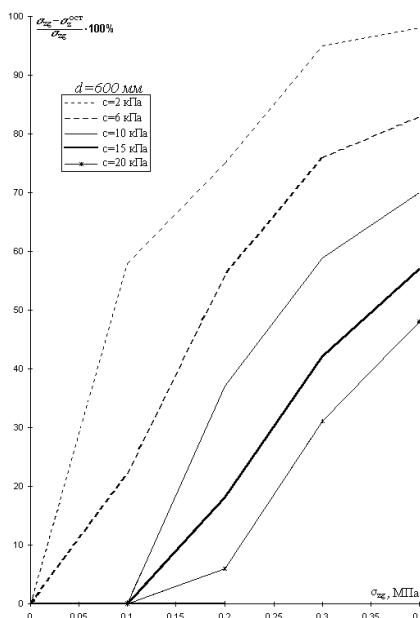


Рис. 5.21. Графики зависимости «противодавления» (%), требуемого для обеспечения устойчивости забоя скважины, от природного давления σ_{zg} при диаметре скважины 600 мм.

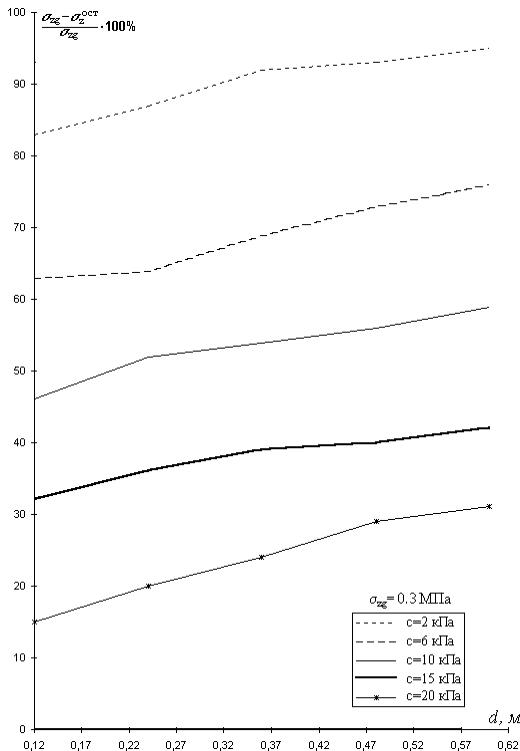


Рис. 5.22. Графики зависимости «противодавления» (%), требуемого для обеспечения устойчивости забоя скважины, от диаметра скважины при величине природного давления на отметке забоя $\sigma_{zg}=0,3 \text{ МПа}$.

Если для кривых семейства 1 продолжить участок 3 до пересечения с осью абсцисс, то можно найти условные точки, которые назовем «порогом устойчивости» забоя скважины. По этим точкам можно построить семейство кривых, изображающих зависимости между удельным сцеплением грунта и требуемым противодавлением (в процентах от природного), обеспечивающим устойчивость забоя (рис. 5.20), при различных значениях d и σ_{zg} ; а также графики зависимости противодавления от природного давления (рис. 5.21) и диаметра (рис. 5.22).

Для кривых семейства 3, на которых перелом кривых выражен неявно, в качестве «порога устойчивости» приняты точки, отвечающие подъему H грунтового сердечника, равному радиусу обсадной трубы.

Проведенный численный эксперимент показал, наиболее существенными факторами, оказывающими влияние на устойчивость грунта в забое скважины, являются удельное сцепление и природное давление, и в меньшей степени диаметр скважины, особенно при больших глубинах и малом сцеплении. В связи с этим явный вид зависимости меж-

ду противодавлением и диаметром скважины получить не удалось.

Следует заметить, что наплыв грунта в скважины меньшего диаметра вызывает меньшие потери объемов грунта и может быть менее опасен для примыкающего здания. Однако в любом случае это вызовет нарушение природной структуры грунта, что для слабых глинистых грунтов должно быть исключено.

Задачи об устойчивости забоя скважины, пробуриаемой под защитой обсадных труб, решались в упругопластической постановке без учета фактора времени. Очевидно, что учет в расчетах реологических свойств грунта и реальной скорости выполнения работ покажет, что противодавление, требуемое для обеспечения устойчивости забоя, окажется меньше полученного по упругопластическому решению.

Однако, применение таких расчетов на практике весьма проблематично, поскольку, во-первых, практические методы определения вязкости грунта с учетом естественного разброса свойств грунта позволяют получать коэффициент вязкости с точностью до одного порядка, во-вторых, выполнение технологических операций по разработке грунта в скважине не имеет жесткого регламента по времени. Таким образом, рассмотренные результаты решения задачи об устойчивости забоя скважины определяют наиболее невыгодные условия работы грунта.

5.2.3. Пример оценки устойчивости забоя скважины

В ходе выполнения подготовительных работ при строительстве в Санкт-Петербурге дома по Малой Дворянской ул., 4 возникли аварийные деформации соседнего дома №6. Строящийся дом имеет плитный фундамент размером в плане 60×60 м с глубиной заложения 4,2 м. Грунты до глубины 6 м представлены среднезернистыми песками средней плотности, ниже которых до глубины в среднем 20 м следует чередование суглинков и супесей текучепластичной и текучей консистенции, местами заторфованных, с модулем деформации 3500...5500 кПа. Ниже залегают плотные моренные суглинки. Проектная осадка по разным вариантам составляла 15-20 см. Для защиты дома №6 проектом было предусмотрено устройство между домами №4 и 6 разделительной стенки в виде ряда железобетонных буронабивных свай длиной 23 м и диаметром 1200 мм через 15 см (рис. 4.23). Свайная стенка предназначалась также для поддержания стены котлована на период его откопки при строительстве нового дома.

Дом №6 кирпичный, примыкал к площадке нового строительства пяти- и трехэтажными крыльями. Фундаменты дома ленточные бутовые с глубиной заложения подошвы 2 м. До начала работ на доме были

установлены стенные геодезические марки, за которыми велись достаточно частые наблюдения.

Сваи устраивались с помощью установки «Като». Обсадная труба диаметром 1200 мм вдавливалась в грунт статической нагрузкой с медленными поворотами по и против часовой стрелки примерно на 30°. Грунт из трубы извлекался грейфером, внедрившимся в грунт под действием собственного веса. В трубе постоянно поддерживался столб воды с поверхностью не ниже поверхности грунта, а в нижней части трубы поддерживался грунтовый сердечник высотой не менее 2 м. После погружения трубы до заданной глубины в нее устанавливался арматурный каркас и методом ВПТ производилось бетонирование, после чего труба извлекалась статическим усилием. При выполнении работ по устройству буронабивных свай в стенах дома возникли многочисленные короткие трещины, а на пятиэтажном крыле образовалась вертикальная трещина с раскрытием на уровне верхнего этажа до 8...10 см (рис. 5.24). В процессе устройства свай непрерывно наблюдались оседания стенных марок, достигшие на трехэтажной части дома 44 мм (кривая 1, рис. 5.25,а), а на пятиэтажной – 96 мм (кривая 2), причем они распространялись на расстояние более 30 м от свайного ряда. Оседания начались с трехэтажного крыла (рис. 5.25,б), ближе к которому были расположены первые выполненные сваи. После завершения свайных работ на 18-ой неделе наблюдений оседания прекратились. Деформации дома от защитной стенки оказались в несколько раз больше тех деформаций, от которых хотели защититься.



Рис. 5.23. Ситуационный план.



Рис. 5.24. Схема деформации основания здания.

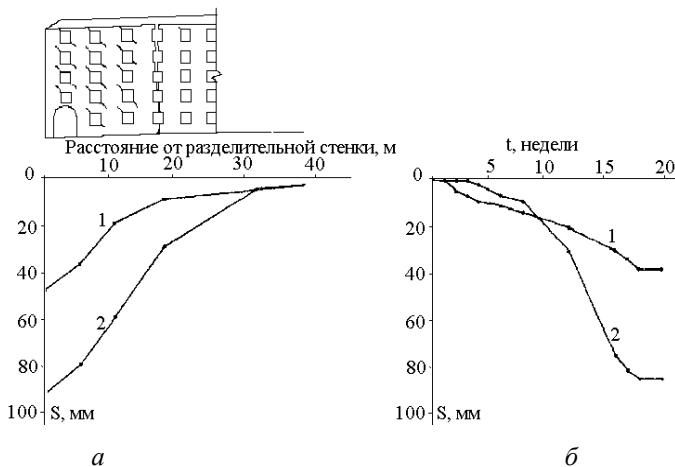


Рис. 5.25. Осадки точек 3-х и 5-ти этажных частей дома №6

(вверху – фасад по М.Дворянской ул.):

a – эпюра осадок фундаментов; *б* – развитие максимальных осадок 3-х и 5-ти этажных частей дома во времени за 20 недель.

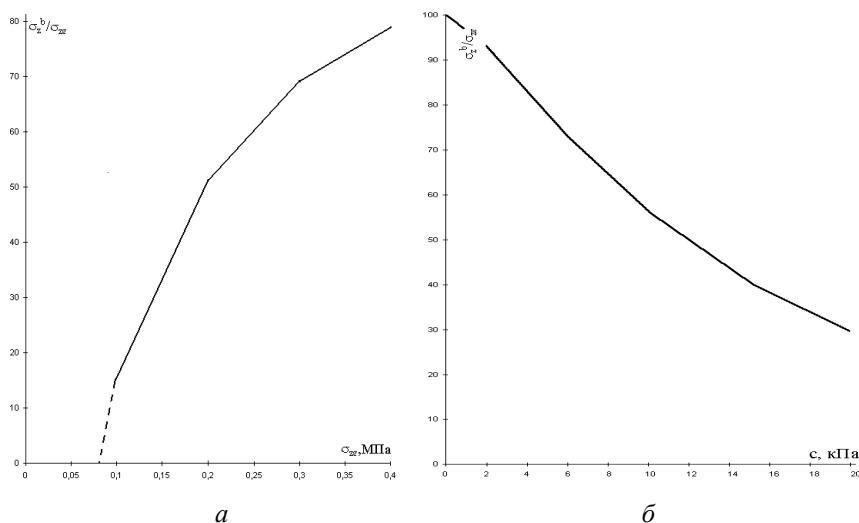


Рис. 5.26. Графики зависимости требуемой интенсивности противодавления на забой обсадной трубы диаметром 1200 мм от:
 α – величины природного давления при $c=10$ МПа;
 β – удельного сцепления c .

В соответствии с принятыми предпосылками проведено численное моделирование для оценки влияния степени снижения природного давления на устойчивость грунта в забое скважины при следующих характеристиках грунта $E_{разр}=40$ МПа, $\gamma=18$ кН/м³, $c=10$ кПа, $\phi=0^\circ$. В рассматриваемом случае расчетная степень снижения природного давления, при которой происходит наплыv грунта в скважину, составила около 42%. Тогда требуемая интенсивность противодавления, обеспечивающая устойчивость забоя, будет равна:

$$\sigma_z^b / \sigma_zg \approx 100\% - 42\% = 58\%.$$

На основе выполненных расчетов получена закономерная кривая зависимости требуемой интенсивности противодавления от величины природного давления на забое скважины (рис. 5.26, α). Согласно этому графику величина σ_z^b / σ_zg падает с увеличением природного давления и, соответственно, с увеличением глубины скважины. Требуемое противодавление на глубине 15 м составит:

$$0,58 \cdot 15 \text{ м} \cdot 18 \text{ кН/м}^3 = 156,6 \text{ кПа.}$$

Существующее противодавление будет складываться из давления от столба воды:

$$15 \text{ м} \cdot 10 \text{ кН/м}^3 = 150 \text{ кПа,}$$

веса грунтового сердечника:

$$2 \text{ м} \cdot 18 \text{ кН/м}^3 = 36 \text{ кПа}$$

и сцепления грунта с обсадной трубой:

$$\pi \cdot 1,2 \text{ м} \cdot 2 \text{ м} \cdot 2 \text{ кПа} = 75,5 \text{ кПа.}$$

Тогда существующее противодавление на отметке обреза трубы составит 261,5 кПа, а коэффициент запаса – 1,67.

Таким образом, расчеты подтверждают, что при проектных параметрах противодавления в случае соблюдения технологии производства работ устойчивость забоя скважины должна быть обеспечена.

Вместе с тем, на основании выполненных расчетов при диаметре обсадной трубы 1200 мм можно выделить два основных фактора, от которых зависит устойчивость забоя скважины на текущей глубине и при данном диаметре обсадной трубы:

1. Фактически существующее противодавление.

2. Характеристика сопротивления грунта сдвигу. На рис. 5.26,б показано, что при уменьшении сцепления требуемое противодавление резко возрастает.

Следовательно, уменьшение прочностных свойств грунта и снижение давления на забой скважины может вызвать интенсивное затекание грунта в скважину.

Анализируя изготовление буронабивных свай по технологии «Като» можно предположить, что снижение сопротивления грунта сдвигу могло произойти по следующей причине. Бытовое давление 100 кПа, существующее уже на глубине 5 м, на порядок превосходит прочность присутствующих в разрезе текущих и текучепластичных суглинка и супеси, и при возникновении предпосылок и возможности движения подобный грунт переходит в плавунное состояние. Если погружение трубы сопровождается какими-либо интенсивными воздействиями: вибрацией, работой разрушающего органа при разбуривании твердых включений, например, тела соседней сваи, то это будет способствовать тиксотропным явлениям в грунте, снижению его прочностных свойств и увеличению подвижности.

С другой стороны, при разработке грунта грейфером имеет место сложное воздействие на грунты – динамическое нагружение при погружении ковша грейфера в скважину и растяжение грунта при его подъеме. Последнее явление сродни эффекту «вакуумного насоса»: в замкнутом объеме поршнем служил ковш грейфера с извлекаемым грунтом. В результате происходит всасывание окружающего грунта, вызывающее, с одной стороны, разжижение грунта и изменение его механических характеристик, с другой стороны, значительное сниже-

ние противодавления на забой скважины.

Из практики наблюдений за деформациями поверхности при проходке горных выработок известно, что объем заполняемой грунтом подземной полости превышает объем воронки оседания на поверхности, поскольку оседающий и деформирующийся грунт в зоне сдвига разрыхляется и его модуль деформации снижается. Поэтому здания на подрабатываемых горными работами территориях не только оседают вместе с поверхностью, но получают дополнительную просадку (врезание), пропорциональную нагрузке на фундамент. Этим можно объяснить разные осадки трех и пятиэтажных частей дома №6, находящихся в одинаковом положении относительно ряда свай.

5.3. Оценка устойчивости скважин, пробуриваемых без защиты обсадных труб для устройства свай

Одной из задач, практически не получившей теоретического решения, является оценка устойчивости скважин малого диаметра, пробуриваемых под защитой тиксотропного раствора для устройства буроинъекционных и буронабивных свай. Начиная с 1946 г. буроинъекционные сваи получили широкое распространение в качестве наиболее эффективного средства усиления оснований и фундаментов зданий и сооружений.

Несмотря на то обстоятельство, что буроинъекционными сваями в настоящее время успешно усилены тысячи зданий во всем мире, в том числе сотни в России, отсутствие необходимого расчетного аппарата до сих пор порождает дискуссии о самой возможности обеспечить устойчивость стенок скважины под тиксотропным раствором (в особенности, в слабых глинистых грунтах).

С целью оценки устойчивости стенок скважины диаметром 300 мм при ее проходке в слабом глинистом грунте с удельным сцеплением c от 2 до 20 кПа, выполнен численный эксперимент методом конечных элементов в осесимметричной постановке. Расчетная схема задачи приведена на рис. 2.27. Размеры расчетной схемы приняты следующими: радиус 5 м, глубина 20 м. Характеристики грунта $E_{разр}=40$ кПа, $\nu=0,3$, $\gamma=19$ кН/м³. Угол внутреннего трения принят равным нулю, что отражает отсутствие консолидационных процессов в глинистом грунте на стадии выполнения технологических операций. В расчетах оценивалась устойчивость скважин глубиной 5, 10 и 15 м.

На первом шаге решения воспроизводилось природное напряженное состояние грунта с шаровым тензором напряжений. На втором шаге узлам сетки с координатой, равной координате радиуса скважины, шагами прикладывалось горизонтальное, а нижним узлам скважины –

вертикальное давление, моделируя процесс уменьшения давления в скважине.

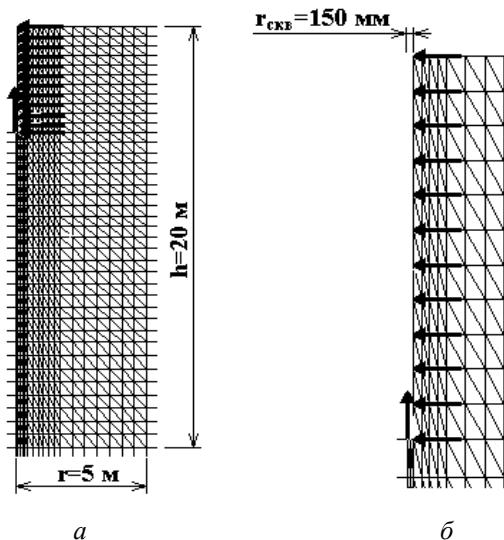


Рис. 5.27. Расчетная схема к задаче об устойчивости стенки скважины:
а – расчетная схема при глубине скважины 5 м;
б – фрагмент расчетной схемы в пределах глубины скважины.

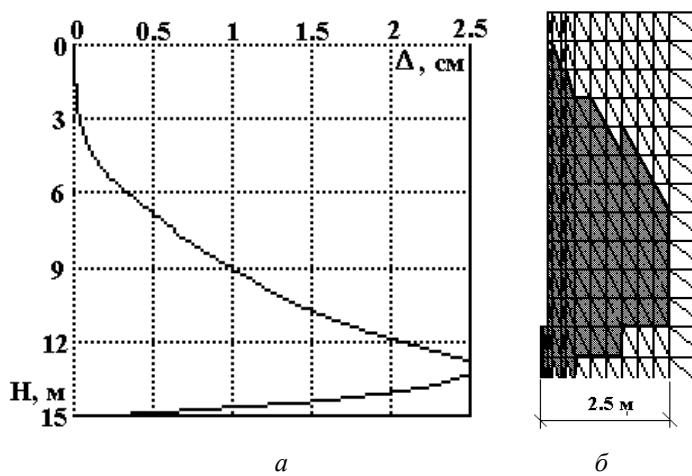


Рис. 5.28. Результаты численного решения задачи об устойчивости стенок скважины: а – деформированная поверхность стенки скважины перед потерей устойчивости; б – зоны развития пластических деформаций в грунте при потере устойчивости стенки скважины.

Расчетом установлено, что наибольшие горизонтальные смещения стенок скважины происходят вблизи забоя (рис. 5.28,*a*), а радиус зон развития пластических деформаций на этой глубине достигает 2,5 м (рис. 5.28,*б*), т.е. превышает восемь диаметров скважины.

Если построить графики зависимости горизонтального смещения стенки скважины Δ от степени снижения давления при различных значениях удельного сцепления грунта (рис. 5.29) и провести касательную к участку кривой, соответствующему стадии интенсивного оплывания стенок скважины, то на пересечении касательной с осью абсцисс можно найти условную точку, определяющую противодавление, требуемое для обеспечения устойчивости скважины. Согласно этим графикам, при глубине скважины 15 м потеря устойчивости стенки скважины начинается при снижении давления примерно на 10% в глинистом грунте с удельным сцеплением 2 кПа, на 30% – в грунте с $c=6$ кПа, на 45% – в грунте с $c=10$ кПа, на 55% – в грунте с $c=15$ кПа и на 65% – в грунте с $c=20$ кПа. Следовательно, для обеспечения устойчивости скважины диаметром 300 мм и глубиной 15 м в грунте с удельным сцеплением 20 кПа достаточно выполнять бурение под защитой заполнителя с удельным весом:

$$\gamma_p = \gamma \cdot (100\% - 65\%) / 100\% = 19 \text{ кН/м}^3 \times 0,35 = 6,65 \text{ кН/м}^3;$$

при удельном сцеплении 15 кПа:

$$\gamma_p = \gamma \cdot (100\% - 55\%) / 100\% = 19 \text{ кН/м}^3 \times 0,45 = 8,55 \text{ кН/м}^3,$$

то есть этим заполнителем может быть вода.

При удельном сцеплении 10 кПа требуемая расчетная плотность раствора составила:

$$\gamma_p = \gamma \cdot (100\% - 45\%) / 100\% = 19 \text{ кН/м}^3 \times 0,55 = 10,45 \text{ кН/м}^3,$$

что обуславливает применение обычных тиксотропных растворов.

При удельном сцеплении 6 кПа требуемая расчетная плотность раствора равна:

$$\gamma_p = \gamma \cdot (100\% - 30\%) / 100\% = 19 \text{ кН/м}^3 \times 0,7 = 13,3 \text{ кН/м}^3;$$

а при удельном сцеплении 2 кПа:

$$\gamma_p = \gamma \cdot (100\% - 10\%) / 100\% = 19 \text{ кН/м}^3 \times 0,9 = 17,1 \text{ кН/м}^3.$$

Таким образом, при глубине скважины 15 м диаметром 300 мм оказывается проблематичным обеспечить устойчивость стенок скважины без обсадных труб в грунте с удельным сцеплением грунта ниже 6 кПа, а в случае применения требуемых по расчету плотных растворов – проблематично обеспечить качество изготовления ствола сваи.

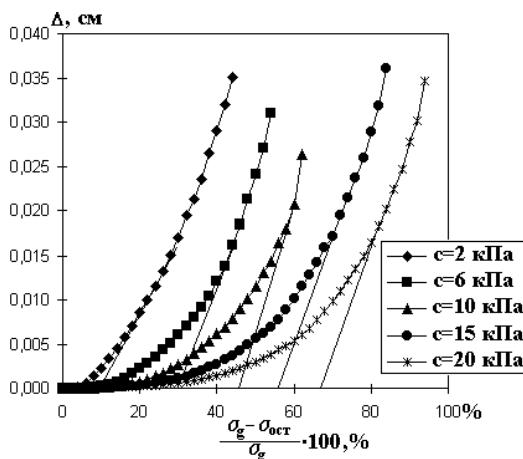


Рис. 5.29. Графики зависимости максимального горизонтального смещения стенки скважины от степени снижения давления.

Диаметр скважины 300 мм, глубина 15 м.

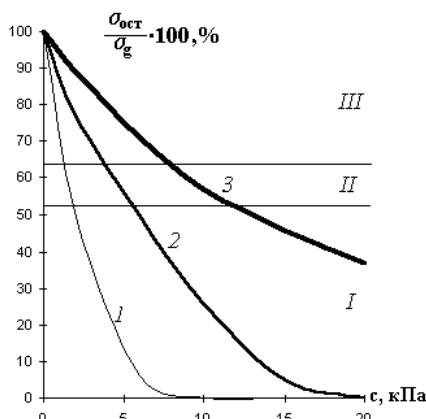


Рис. 5.30. Графики зависимости требуемого противодавления для обеспечения устойчивости стенок скважины, пробуриваемой в глинистом грунте без защиты обсадных труб, от удельного сцепления при глубине скважины 15 м и диаметре: 1 – 150 мм; 2 – 300 мм; 3 – 450 мм.

На рис. 5.30 приведены расчетные графики зависимости требуемого противодавления, достаточного для обеспечения устойчивости стенок скважины, пробуриваемой в глинистом грунте без защиты обсадных труб, от удельного сцепления при глубине скважины 15 м и диаметрах 150, 300 и 450 мм. На рисунке римскими цифрами выделены следующие области:

I – область, соответствующая сочетанию удельных сцеплений грунта и диаметров скважин, при которых заполнителем скважины

может быть вода;

II – область, соответствующая сочетанию удельных сцеплений грунта и диаметров скважин, при которых заполнителем скважины может быть обычный тиксотропный раствор бентонитовой глины;

III – область, соответствующая сочетанию удельных сцеплений грунта и диаметров скважин, при которых для заполнения скважины требуется использование тяжелых растворов с удельным весом более 12 кН/м³.

Приведенные результаты расчетной оценки устойчивости стенок скважин получены для однородной толщи массива грунта и отражают характерные зависимости между требуемым противодавлением и размерами скважины и механическими параметрами грунта. Как показала практика расчетов для ряда объектов в реальных грунтовых условиях Санкт-Петербурга, на устойчивость скважин существенное влияние оказывает сочетание физико-механических свойств грунтов, слагающих основание здания. Поэтому достаточно сложно создать инженерные номограммы и выбор способа обеспечения устойчивости скважины должен осуществляться отдельно для каждого конкретного случая.

5.4. Численное моделирование процесса погружения свай

В проектной практике оценка влияния нового строительства на окружающую застройку при возведении зданий на вдавливаемых сваях сводится к определению дополнительных осадок существующих зданий в результате статического нагружения территории, а технология вдавливания считается щадящей, не вызывающей развития существенных деформаций окружающей застройки. Поэтому в примыкании к существующим зданиям рекомендуется такая технология устройства свай. Однако анализ развития дополнительных деформаций некоторых зданий в Санкт-Петербурге при устройстве рядом с ними сооружений на вдавливаемых сваях показывает, что наибольшие осадки существующих зданий происходят на этапах вдавливания свай, а статическое нагружение территории оказывает существенно меньшее влияние на окружающую застройку. Развитие дополнительных осадок существующих зданий и появление в их стенах трещин отмечалось при вдавливании свай по ул. Майорова, 37 в Санкт-Петербурге (И.Д. Зиновьева, С.Н. Сотников, 1989), при реконструкции Мариинского театра (Б.И. Далматов, С.Н. Сотников, 1992).

Развитие дополнительных осадок и появление трещин в стенах в процессе вдавливания свай зафиксировано у существующих зданий, вплотную примыкающих к площадкам строительства домов по Кара-ванной ул., 10, по ул. Вс.Вишневского, 13 в Санкт-Петербурге. Пло-

щадка строительства дома №13 по ул. Вс.Вишневского с поверхности сложена техногенным слоем мощностью до 2,5 м, под которым залегает толща слабых морских и озерно-ледниковых отложений мощностью до 9 м. В двадцатиметровой зоне примыкания к существующим зданиям сваи были погружены методом статического вдавливания. Сваи имели длину 14 м и сечение 35×35 см. В процессе погружения зафиксированы осадки межевых стен существующих зданий, достигшие 17 мм для дома №11 и 29 мм для дома №15, что привело к появлению трещин в стенах раскрытием до 15 мм. Кроме этого отмечались осадки фасадных стен и появление на них трещин на расстоянии до 10 м от ближайших рядов свай.

Результаты экспериментального исследования явлений, происходящих в грунтах при погружении в них свай (забивкой и вдавливанием), приведенных в работах А.А. Бартоломея (1972), Б.В. Бахолдина (1971, 1988), Б.В. Бахолдина и Н.М. Большакова (1973), Б.В. Бахолдина, Е.М. Перлея и Е.В. Светинского (1997), Б.В. Бахолдина и Э.А. Товмасяна (1987), С.Я. Боженкова и А.А. Бирюкова (1937), Н.М. Герсеванова (1932), Б.Г. Гуменского и Г.Ф. Новожилова (1959, 1960), И.П. Середюка (1977), А.А. Цесарского и И.Н. Коломийца (1988), S.B. Avery and S.D. Wilson (1950), A.E. Cummings et al (1950), H.B. Seed and L.C. Reese (1957) и других исследователей, позволяют сделать следующие выводы.

1. При погружении свай происходит уплотнение грунта под острием сваи и в стороны.

2. Погружение свай в глинистые грунты приводит к подъему дневной поверхности.

3. Величина уплотнения грунта и выпора зависит от степени водонасыщения грунта. Чем больше в грунте пор, заполненных воздухом, тем в меньшем объеме грунта, окружающем сваю, происходит уплотнение при нагружении сваи и тем меньше подъем поверхности грунта.

4. Величина подъема дневной поверхности зависит от плотности свайного поля. Чем ближе расположены сваи в свайном поле, тем выше подъем поверхности.

5. При погружении свай наблюдается осадка зданий, находящихся в пределах зоны влияния.

6. Размеры зоны влияния зависят от физико-механических свойств грунтов и плотности расположения свай. Чем меньше показатель текучести и больше плотность свайного поля, тем больший размер имеет зона влияния.

Погружение свай сопровождается значительными деформациями и смещениями грунта, что, как показано в разделе 5.1, исключает использование традиционных геометрически линейных соотношений

при теоретическом анализе процессов, происходящих в грунте.

В настоящем разделе рассматривается численное решение задачи о погружении сваи диаметром 300 мм в однородный водонасыщенный глинистый грунт. Для описания работы грунта рассмотрена идеально упругопластическая модель с предельной поверхностью, описываемой критерием Мизеса $\tau_{np}=\text{const}$. Сопротивление грунта сдвигу τ_{np} включает в себя только слагаемое « c_{oct} », соответствующее октаэдральному сцеплению. Для расчетов приняты недренированные механические характеристики глинистого грунта $E=40$ МПа, $c_{oct}=10$ кПа. Удельный вес грунта принят равным $\gamma=18$ кН/м³, коэффициент Пуассона – $\nu=0,35$.

С целью снижения влияния граничных условий на результаты решения радиус расчетной области был принят равным тридцати диаметрам сваи (9 м), высота – 15 м. Задача решалась в осесимметричной постановке в два этапа. На первом этапе моделировалось природное напряженное состояние с шаровым тензором напряжений приложением к узлам конечноэлементной сетки объемных сил от собственного веса грунта. На втором этапе узлам, находящимся на поверхности в пределах радиуса сваи, задавались вертикальные перемещения с шагом 1 мм.

В процессе решения происходит смещение узлов и искажение конечноэлементной сетки. Перестроение искаженной сетки конечных элементов производилось в соответствии с принципами, изложенными в разделе 5.2.5. При погружении сваи образуются новые контакты грунта вдоль ствола сваи, что имитировалось заданием узлам, текущие горизонтальные координаты которых соответствуют радиусу сваи, жестких ограничений в горизонтальном направлении. Таким образом, предполагалось абсолютное проскальзывание сваи по грунту в процессе погружения в глинистый грунт. В процессе решения равновесие системы контролировалось вычислением суммарных вертикальных реактивных усилий по верхней и нижней границе.

Погружение сваи выполнено до глубины около 10 м. До глубины 6 м разница между графиками зависимости реактивного усилия по верхней и по нижней границам составляла не более 4% (на кривой 1, рис. 5.31 графики практически совпадают), а после глубины погружения 6 м началось резкое расхождение графиков, в силу чего анализ результатов решений приведен только до глубины погружения 6 м. На графике зависимости усилия вдавливания от глубины погружения сваи (рис. 5.31) имеются небольшие скачки, вызванные некоторым нарушением условий равновесия при аппроксимации полей напряжений и деформаций на перестроенные сетки.

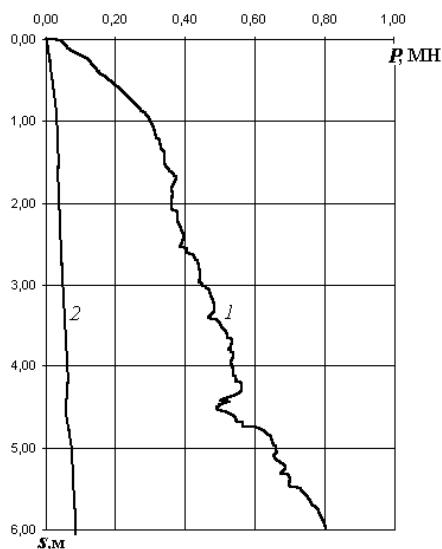


Рис. 5.31. Графики зависимости усилия вдавливания от глубины погружения сваи: 1 – $E=40$ МПа; 2 – $E=4$ МПа.

Траектории движения узлов конечноэлементной сетки, имитирующие траектории движения частиц грунта в процессе погружения сваи, приведены для различных глубин погружения с шагом 0,5 м на рис. 5.32, 5.33. Области, в которых грунт находится в предельном состоянии, показаны на рис. 5.34.

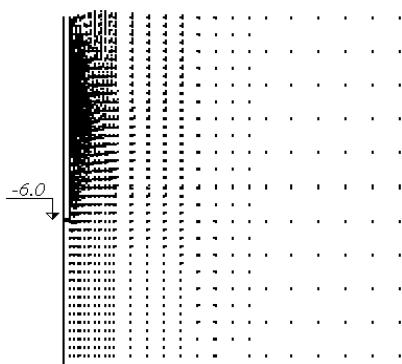


Рис. 5.32. Траектории движения частиц грунта при погружении сваи на глубину 6 м.

Численные эксперименты позволили выявить и проанализировать следующие эффекты, происходящие в основании при погружении сваи.

1. Движение частиц в окрестности острия сваи направлено, преимущественно, в стороны и вниз, в верхней зоне направление движения меняется на противоположное и сопровождается подъемом дневной поверхности.

2. Подъем дневной поверхности вокруг сваи наблюдается на всем протяжении погружения сваи (рис. 5.35). При этом по мере погружения сваи скорость подъема дневной поверхности быстро снижается, а радиус подъема поверхности увеличивается (рис. 5.36).

3. В рассмотренных условиях погружения сваи перемещения частиц грунта, достигающие 1 см, распространяются на расстояние до 10...12 радиусов сваи (рис. 5.37).

4. Наиболее интенсивное распространение зон предельного состояния грунта происходит на первых метрах погружения сваи (рис. 5.34). По мере погружения сваи скорость распространения областей предельного состояния снижается, локализуясь при принятых механических характеристиках глинистого грунта на расстоянии до 30 диаметров сваи.

5. Расчеты показали, что при вдавливании сваи происходит только подъем дневной поверхности, а осадки поверхности вокруг сваи отсутствуют. Следовательно, факты наблюдавшихся на практике осадок зданий Санкт-Петербурга, возведенных на слабых глинистых грунтах и расположенных рядом с погружаемыми сваями, определяются не движением частиц грунта при погружении сваи, а развитием областей предельного состояния грунта в основании существующих зданий, изменяющих общее напряженное состояние массива грунта и приводящих к ухудшению механических свойств слабых глинистых грунтов.

6. В рамках используемой в расчетах механической модели существенное влияние на усилие вдавливания и распространение зоны влияния, оказывает разгрузочный модуль грунта (рис. 5.31). Увеличение сжимаемости грунта приводит к снижению радиуса влияния и усилия вдавливания. Этот факт подтверждает эффективность предварительного рыхления грунта для снижения влияния вдавливания на окружающую застройку.

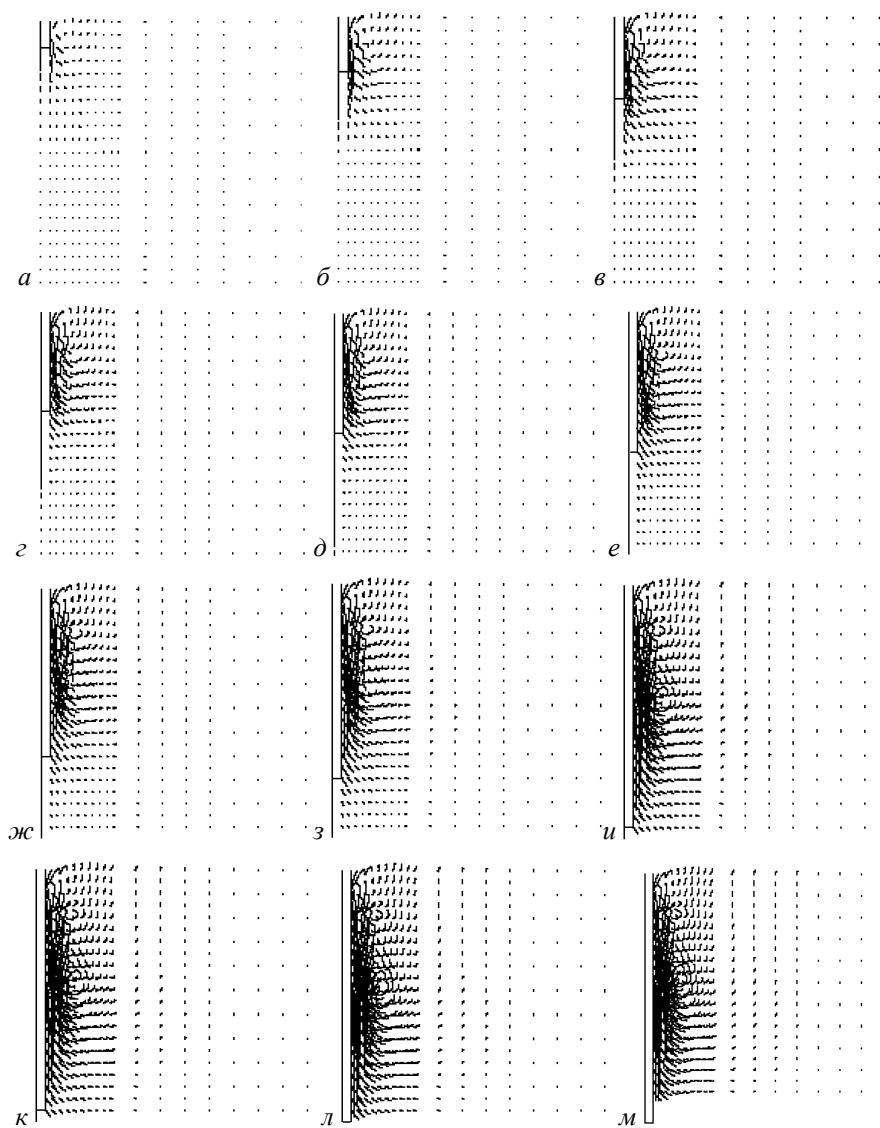


Рис. 5.33. Траектории движения частиц грунта в процессе погружения свай:
а – при глубине погружения свай 0,5 м, б – то же, 1 м, в – то же, 1,5 м, г – то же, 2 м, д – то же, 2,5 м, е – то же, 3 м, жс – то же, 3,5 м, з – то же, 4 м, и – то же, 4,5 м, к – то же, 5 м, л – то же, 5,5 м, м – то же, 6 м.

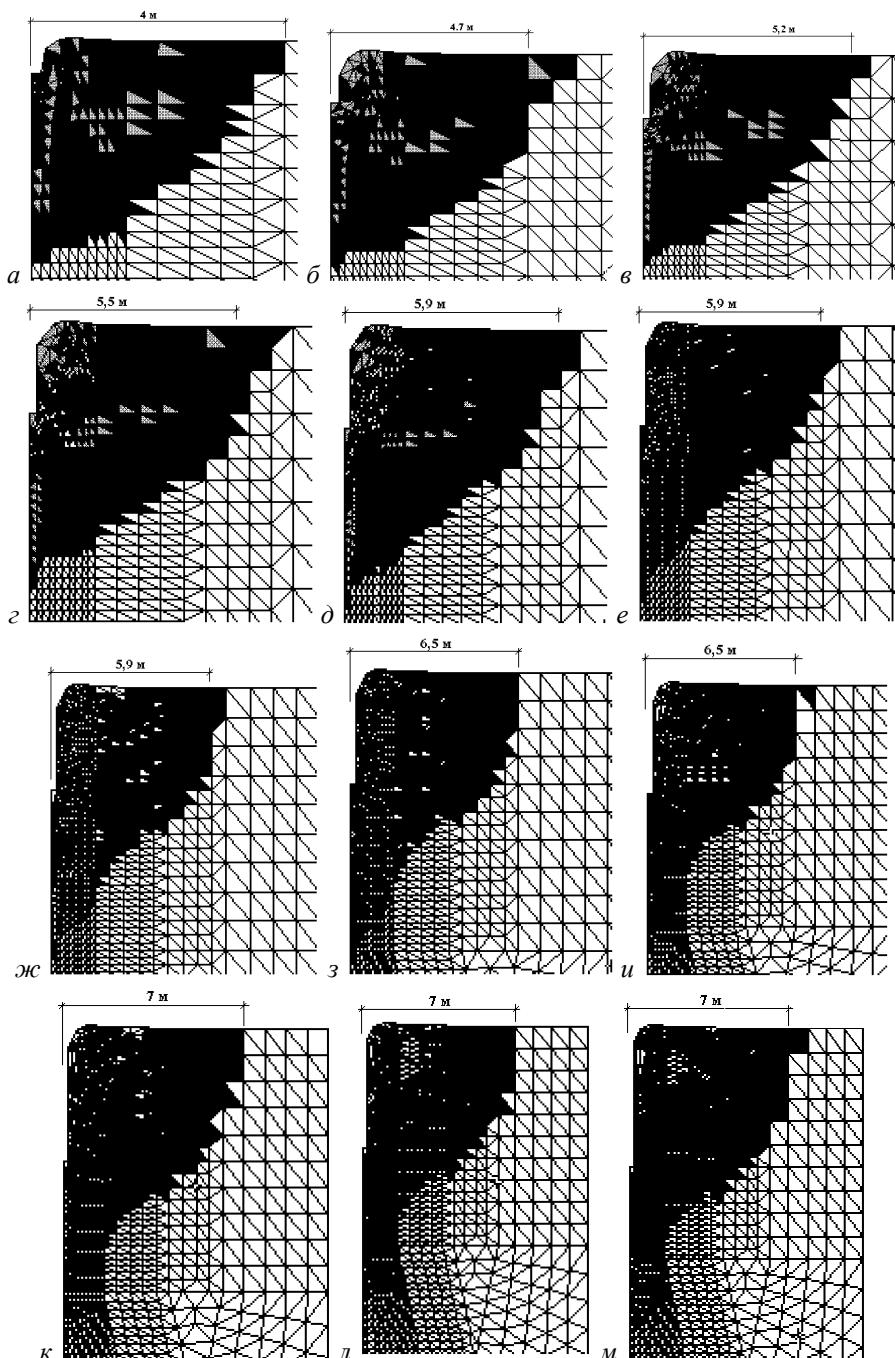


Рис. 5.34. Развитие областей предельного состояния грунта в процессе погружения сваи (см. экспликация к рис. 5.33).

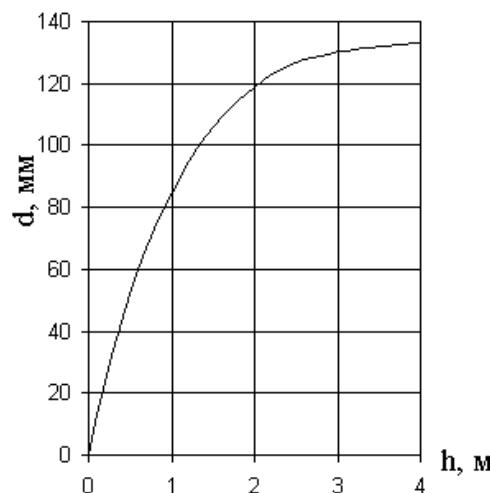


Рис. 5.35. График зависимости высоты максимального подъема дневной поверхности d глубины погружения свай h .

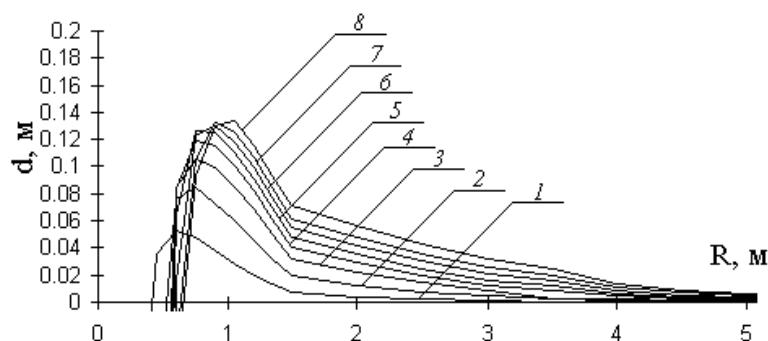


Рис. 5.36. Графики подъема дневной поверхности d при глубине погружения свай: 1 – 0,5 м; 2 – 1 м; 3 – 1,5 м; 4 – 2 м; 5 – 2,5 м; 6 – 3 м; 7 – 3,5 м; 8 – 4 м.

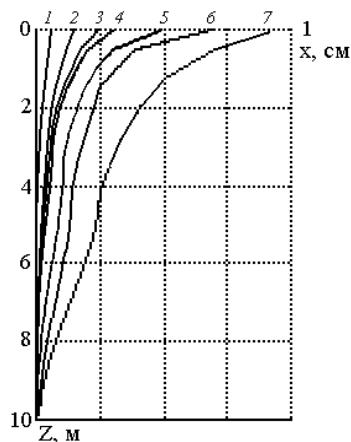


Рис. 5.37. Графики распределения горизонтальных перемещений грунта на расстоянии 10г от сваи по глубине при погружении сваи на глубину:
1 – 0,5 м; 2 – 1 м; 3 – 1,5 м; 4 – 2 м; 5 – 3 м; 6 – 4 м; 7 – 6 м.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Абдуллаев Б.Н.** Исследование напряженно-деформированного состояния грунта вокруг проникающего тела. //Сейсмодинамика сооружений, взаимодействующих с грунтом. – Ташкент, 1991. – с. 3-4.
2. **Антуков В.Н., Фонарев А.В.** Расчет упругопластических течений на нерегулярных треугольных сетках с перестройкой. ПМТФ. №6. 1990. – с. 109–115.
3. **Бакушев С.В.** Вариант построения расчетных моделей геометрически нелинейных сплошных сред. //Изв. вузов. Строительство и архитектура., 1991. – с. 24–29.
4. **Бартоломей А.А.** Изменение модуля деформации, объемного веса и сил сцепления глинистых грунтов в активной зоне свайных фундаментов //Сб. тр. ППИ, вып. 108, Пермь, изд-во ППИ, 1972.
5. **Бахолдин Б.В.** Сопротивление глинистых грунтов при погружении свай //Свайные фундаменты/ Тез. докл. семинара-совещания. Киев, 1971.
6. **Бахолдин Б.В.** Определение несущей способности вдавливаемых свай при усиливании ими оснований реконструируемых зданий и сооружений. //Тр. института /ВНИИОСП. – 1988. Вып.90. Усиление оснований и фундаментов при реконструкции. – с. 22–28.
7. **Бахолдин Б.В., Большаков Н.М.** Исследование напряженного состояния глинистых грунтов при погружении свай. «Основания, фундаменты и механика грунтов», №5, 1973.
8. **Бахолдин Б.В., Перлей Е.М., Светинский Е.В.** Исследование процесса погружения свай вдавливанием. «Основания, фундаменты и механика грунтов», №3, 1997. – с . 25–27.
9. **Бахолдин Б.В., Товмасян Э.А.** Исследование напряженно-деформированного состояния грунта при вдавливании сваи. //Ускорение научно-технического прогресса в фундаментостроении. Сб. науч. тр. в 2 т. Т. 2. Методы проектирования эффективных конструкций оснований и фундаментов/ НИИОСП, М.; Стройиздат. 1987. – с.15-16.
10. **Беленькая В.В., Перлей Е.М., Ленинградский В.В., Несмелов Н.С.** Не лучше ли сваи-оболочки при многоэтажной застройке на слабых грунтах? Строительство и архитектура. №5, 1973. – с. 31–33.
11. **Бердичевский С.Д.** Замкнутая система уравнений геометрически нелинейной плоской задачи теории упругости с использованием «истинных» напряжений. Автореф. дис...канд. техн. наук. МИСИ, М., 1990. – 23 с.
12. **Боженков С.Я., Бирюков А.А.** Деформации в глинистых грунтах при погружении свай. М., Трансжелдориздат, 1937.

13. **Васильев Б.Д.** Основания и фундаменты. ОНТИ. Главная редакция строительной литературы. Л.-М., 1937. – 596 с.
14. **Виноградов Г.В., Малкин А.Я.** Реология полимеров. М., «Химия», 1977. – 450 с.
15. **Волкова Р.А., Михайлова Н.В., Тишкун В.Ф., Фаворский А.П.** Применение вариационного подхода для расчета газодинамических течений на сетках переменной структуры. – Препринт ИТПМ АН СССР, №17. М., 1982.
16. **Герсанов Н.М.** Определение сопротивления свай. – М., Госстройиздат, 1932.
17. **Городцов В.А., Леонов А.И.** О кинематике, неравновесной термодинамике и реологических соотношениях в нелинейной теории вязкоупругости. Прикл. математика и механика. Т. 32, вып. 1, 1968 г. – стр. 70–94.
18. **Гречко В.Ф., Гуналенко В.И., Прочак Г.П.** Конструкция буронаабивной сваи с защитной оболочкой. //Пром. стр-во и инж. сооружения. 1988. №1. – с.27.
19. **Громов В.А., Завьялов А.М.** Анализ движения грунта, разрабатываемого дорожно-строительными машинами. //Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1987. №12. – с. 98–100.
20. **Гулидов А.И., Фомин В.М.** Модификация метода Уилкинса для решения задач соударения тел. – Препринт ИТПМ СО АН СССР, №49. Новосибирск, 1982.
21. **Гуменский Б.М., Новожилов Г.Ф.** К вопросу о явлениях, протекающих в глинистых грунтах при погружении в них свай// Вопросы инженерной геологии Ленинградского экономического региона. Л., ЦБТИ, 1960.
22. **Далматов Б.И., Сотников С.Н.** Влияние вдавливания свай на осадку существующих зданий //Проблемы свайного фундаментостроения /Тр. III Междунар. конф. Часть II. Пермь, 1992. – с. 47–50.
23. **Далматов Б.И., Сотников С.Н., Дорошкевич Н.М., Знаменский В.В.** Исследование деформации грунтов в основании сооружений// Тр. VIII Междунар. конгр. по механике грунтов и фундаментостроению. – М.: Стройиздат, 1973. – с. 64–72.
24. **Зиновьева И.Д., Сотников С.Н.** Опыт применения свай, погруженных способом вдавливания, при уплотнении застройки в центральном районе Ленинграда //Использование натурных наблюдений для совершенствования проектирования фундаментов и изысканий в условиях слабых грунтов /Материалы научно-технического семинара 4-5 июля. Л., ЛДНТП, 1989. – с. 42–45.
25. **Копейкин В.С.** Влияние геометрической нелинейности на результаты расчетов напряжений и перемещений в грунтовых основаниях при развитых зонах больших перемещений. Автореф. дисс...канд. техн. наук. – М., МИСИ, 1980.
26. **Леонов А.И.** Об описании реологического поведения упруговязких сред при больших упругих деформациях. Институт проблем механики АН СССР. Препринт №34. М., 1973. – 64 с.
27. **Лурье А.И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 512 с.

-
28. **Новиков М.Ф., Пушкаревич В.С.** Погружение свай вдавливанием в условиях реконструкции. //Основания, фундаменты и механика грунтов. 1987. №2. – с. 9–11.
 29. **Новожилов В.В.** Вопросы механики сплошной среды. Л.: Судостроение, 1989. – 400 с.
 30. **Парамонов В.Н., Шашкин А.Г.** Моделирование технологических процессов при устройстве буровых свай в слабых глинистых грунтах. //Проблемы фундаментостроения в грунтовых условиях новой столицы/ Тр. I-ой Казахстанской национальной геотехнической конференции. Акмола, 1997. т. II. – с. 462–466.
 31. **Поздеев А.А., Трусов П.В., Нишин Ю.И.** Большие упруго-пластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. – 232 с.
 32. **Прагер В.** Введение в механику сплошной среды. М., Изд-во иностранной литературы, 1963. – 312 с.
 33. **Работягов Д.Д.** Механика материалов при больших деформациях. Кишинев. «Штиинца», 1995 – 168 с.
 34. **Ренне И.П.** Теория конечных деформаций и экспериментальных методов исследования деформированного состояния. Тула., ТПИ, 1985. – 75 с.
 35. **Садырин А.И.** Алгоритм нерегулярной перестройки плоских треугольных сеток в МКЭ. //Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности. Всесоюз. межвуз. сб. /Горьк. ун-т, 1985, с. 8–13.
 36. **Светинский Е.В., Гайдай М.С.** Технология вдавливания свай при реконструкции действующих предприятий и в стесненных условиях строительства. //Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1993. – №1. – с.13–16.
 37. **Середюк И.П.** Исследование процессов, происходящих в глинистых грунтах при погружении свай. Автореф. дисс...канд. техн. наук. (05.23.02-ОиФ). Л., 1977.
 38. **Трудсделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. – 592 с.
 39. **Трусов П.В.** Обобщение теории упруго-пластических процессов на случай больших пластических деформаций. Автореф. дисс...д-ра физ.-мат. наук. (01.02.04-МДТТ). М., 1986.
 40. **Фадеев А.Б.** Метод конечных элементов в геомеханике. Изд-во «Недра». М., 1987. – 224 с.
 41. **Федоровский В.Г.** Учет геометрической нелинейности в конечноэлементных расчетах грунтовых массивов //Труды ин-та /НИИ оснований и подземных сооружений, 1986, вып.86. – с. 3–9.
 42. **Цесарский А.А., Коломиец И.Н.** Исследование выпора грунта и подъема свай при возведении свайного поля //Технология и оборудование для свайных и буровых работ: Сб. науч. тр. /Всесоюз. науч.-исслед. ин-т гидромеханизации, сан.-техн. и специальных работ. – Л., 1988. – с. 6–10.
 43. **Черников А.К.** Теоретические основы геомеханики: Учеб. пособие. – Спб: Петербургский гос. Ун-т путей сообщения, 1994. – 187 с.
 44. **Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н.** Теория больших упругих деформаций. Учеб. пособие.-Л.: Изд-во Л. ун-та, 1988. – 256 с.

45. **Шарафутдинов Г.З.** Об описании больших упругих деформаций. Механика тв. тела. №1, М., Наука, 1995 – с.79–84.
46. **Avery S.B., Wilson S.D.** Discussion of «Effects of Driving Piles into Soft Clays», by Cummings et all. Transactions ASCE, 1950, Vol. 115.
47. **Cummings A.E., Kerkhoff G.O., Peck R.B.** Effect of Driving Piles Into Soft Clays. Transactions ASCE, 1950, Vol. 115.
48. **Dafalias Y.F.** Corotational Rates for Kinematic Hardening at Large Plastic Deformations. – Trans. ASMFE J. of Appl. Mech., 1983, No.3, pp. 561–565.
49. **Lee E.H.** Elasto-Plastic Deformation at Finite Strains. – Trans ASME. J.Appl. Mech., 1969. Vol. 36. №1. – pp. 1–6.
50. **Matiasson Kjell et al.** On Accuracy and Efficiency of Numeral Algorithms for Geometrically Nonlinear Structural Analysis. Geteborg. – 1985.
51. **Matiasson Kjell, Samuelsson Alf.** Total and Updated Lagrangian Forms of the Co-rotational Finite Element Formulation in Geometrically and Materially Nonlinear Analysis. Geteborg. – 1985.
52. **Seed H.B., Reese L.C.** The Action of Soft Clays along Friction Piles. Transaction ASCE, 1957. Vol. 122.
53. **Seth B.R.** Finite Strain in Elastic Problem. – Phil. Trans. Roy Soc. London, 1935, Vol. A234, – pp. 231–264.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|-----|
| Об авторе..... | 5 |
| Предисловие | 6 |
| Введение..... | 7 |
| 1. Физически нелинейные задачи механики грунтов | |
| 1.1. Модели грунта и методы расчета конечных деформаций основания ... | 13 |
| 1.2. Численная реализация модели упрочняющейся среды | 24 |
| 1.2.1. Конечноэлементная реализация варианта упрочняющейся модели типа Cam-Clay | 24 |
| 1.2.2. Алгоритм конечно-элементного решения задач с применением модели упрочняющейся среды | 36 |
| 1.2.3. Определение коэффициентов уравнения зависимости объемных пластических деформаций от гидростатического давления . | 42 |
| 1.2.4. Оценка деформируемости глинистого грунта в трехосном приборе и сравнение с расчетными данными | 44 |
| 1.3. Численная оценка эффектов, описываемых моделью упрочняющейся среды в условиях плоской деформации, при различных способах нагружения | 49 |
| 1.4. Численная реализация модели упрочняющейся среды с учетом разупрочнения | 55 |
| 1.5. Оценка эффективности использования моделей упрочняющейся среды в практических расчетах | 61 |
| 1.5.1. Решение задачи о нагружении фундамента | 62 |
| 1.5.2. Решение задачи об откопке котлована..... | 65 |
| Литература | 68 |
| 2. Численное и экспериментальное исследование фильтрационной консолидации и ползучести глинистых грунтов | |
| 2.1. Методы описания процессов фильтрационной консолидации и ползучести грунтов..... | 71 |
| 2.2. Вывод определяющих уравнений МКЭ теории фильтрационной консолидации для условий плоской деформации | 78 |
| 2.3. Решение задачи фильтрационной консолидации с учетом начального градиента напора | 95 |
| 2.4. Вывод определяющих уравнений МКЭ для решения задач теории ползучести..... | 102 |
| 2.5. Вывод определяющих уравнений МКЭ для решения задач теории фильтрационной консолидации с учетом ползучести скелета грунта | 112 |
| 2.6. Исследование консолидационных процессов в глинистых грунтах в лабораторных условиях | 116 |
| 2.7. Исследование развития деформаций глинистых грунтов в натурных условиях | 129 |

| | |
|--|-----|
| 2.8. Численная оценка эффектов, возникающих в массиве грунта, работающего в условиях плоской деформации, при выполнении расчетов по различным моделям..... | 146 |
| Литература..... | 152 |
| 3. Расчет напряженно-деформированного состояния грунтового массива с учетом действия фильтрационных сил | |
| 3.1. Задачи фильтрации в механике грунтов | 155 |
| 3.2. Расчет фильтрационного потока в основании сооружений | 157 |
| 3.3. Примеры решения задач о безнапорной фильтрации..... | 162 |
| 3.4. Расчет напряженно-деформированного основания с учетом фильтрации воды..... | 170 |
| Литература..... | 178 |
| 4. Построение модели грунта для условий больших деформаций | |
| 4.1. Геометрически нелинейные задачи в геотехнике | 179 |
| 4.2. Анализ механических эффектов, отражаемых различными способами описания геометрической нелинейности | 183 |
| 4.2.1. Принципы построения конечноэлементных соотношений для геометрически нелинейных задач | 183 |
| 4.2.2. Оценка корректности использования различных коротационных производных для разложения движения сред на жесткое и деформационное | 187 |
| 4.3. Построение модели грунтовой среды для условий больших упругопластических деформаций | 193 |
| 4.3.1. Исходные предпосылки и допущения | 193 |
| 4.3.2. Конечноэлементная реализация модели среды, испытывающей большие деформации | 198 |
| 4.3.3. Учет развития необратимых деформаций в геотехнических задачах | 203 |
| 4.3.4. Процедура конечноэлементного решения геометрически нелинейных задач геотехники в условиях больших деформаций | 205 |
| 4.3.5. Принципы нерегулярного перестроения конечно-элементных сеток в условиях больших искажений..... | 213 |
| 5. Решение геотехнических задач с большими упругопластическими деформациями | |
| 5.1. Решение задачи о вдавливании штампа в грунт | 216 |
| 5.2. Оценка условий наплыва грунта в скважину при устройстве буронабивных свай под защитой обсадной трубы | 229 |
| 5.2.1. Постановка задачи | 229 |
| 5.2.2. Численный анализ устойчивости забоя скважины | 232 |
| 5.2.3. Пример оценки устойчивости забоя скважины..... | 239 |
| 5.3. Оценка устойчивости скважин, пробуриваемых без защиты обсадных труб для устройства свай..... | 244 |
| 5.4. Численное моделирование процесса погружения свай..... | 248 |
| Литература..... | 257 |

Научное издание

В.Н. Парамонов

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
ПРИ РЕШЕНИИ
НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ГЕОТЕХНИКИ

Электронная подготовка издания — Е.В. Дубинин

Формат 72×52/16. Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 11,4. Физ. печ. л. 16,5. Тираж 300 экз. Зак.

Группа компаний «Геореконструкция».
190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 4.
Тел./факс: (812) 316-6118, 575-3587, 251-7098
www.georec.spb.ru

Отпечатано в типографии «МСТ».
199178, Санкт-Петербург, В.О., 10-я линия, д. 57.
Тел./факс: (812) 325-2536, 325-2537
www.mst.spb.ru